

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

**“Modelado de tránsito y optimización del
flujo vehicular en paralelo”**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

**P R E S E N T A :
ING. JONATAN ÁLVAREZ MÉNDEZ**

**D I R E C T O R D E T E S I S :
D R . R E N É L U N A G A R C Í A**



MÉXICO. D.F.

DICIEMBRE 2014



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 13:00 horas del día 19 del mes de noviembre de 2014 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

Centro de Investigación en Computación

para examinar la tesis titulada:

“Modelado de tránsito y optimización del flujo vehicular en paralelo”

Presentada por el alumno:

ÁLVAREZ
Apellido paterno

MÉNDEZ
Apellido materno

JONATAN
Nombre(s)

Con registro:

B	1	2	1	0	2	2
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de: **MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de Tesis

Dr. René Luna García

Dr. Carlos Fernando Aguilar Ibáñez

Dr. Ricardo Barrón Fernández

Dr. Jesús Guillermo Figueroa Nazuno

M. en C. Germán Téllez Castillo

Dr. Salvador Godoy Calderón

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

Dr. Luis Alfonso Villa Vargas

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
EN COMPUTACIÓN
DIRECCIÓN



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México, D.F., el día 26 del mes de noviembre del año 2014, el que suscribe *Jonatan Álvarez Méndez*, alumno del Programa de la Maestría en Ciencias de la Computación, con número de registro B121022, adscrito al Centro de Investigación en Computación, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. René Luna García, y cede los derechos del trabajo intitulado “*Modelado de tránsito y optimización del flujo vehicular en paralelo*”, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección jonalvarez1989@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Jonatan Álvarez Méndez

Nombre y firma

RESUMEN

En la presente tesis se propone un modelo para el comportamiento de flujo del tránsito vehicular a partir de una representación de ecuaciones de flujo continuo dentro de un grafo direccionado. El algoritmo propuesto da una solución inicial con todos los parámetros dentro de valores preestablecidos y a partir de ésta se busca mejorar la solución anterior mediante variaciones diferenciales implementadas en paralelo para cada ecuación de flujo, evaluando y sincronizando dentro del algoritmo las condiciones de frontera.

Palabras Clave: Modelado; Tránsito Vehicular; Flujo Vehicular; Ecuación de Flujo; Cómputo en Paralelo; Optimización Multiobjetivo.

ABSTRACT

In this work is presented a model for the vehicular traffic flow behavior using a representation of continuous flow equations into a directed graph. The algorithm proposed gives an initial feasible solution with all the parameters within preset values and from this it is expected to improve the previous solution by differential variations implemented in parallel for each flow equation, evaluating and synchronizing the boundary conditions.

Key words: Modeling; Vehicular Traffic; Traffic Flow; Flow Equation; Parallel Computing; Multi-objective Optimization.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a **Dios**, por bendecirme con la vida y permitirme llegar hasta este momento rodeado de gente maravillosa, por todas las oportunidades que me ha dado, por todos los retos que me ha puesto, por todas las alegrías que me ha brindado.

Es mi más profundo deseo el agradecer a todas las personas e instituciones que hicieron posible la elaboración de la presente tesis, en primer lugar, quiero agradecer al **Instituto Politécnico Nacional (IPN)** por la preparación profesional de primer nivel que he recibido. Ser egresado de la **Escuela Superior de Cómputo (ESCOM)** y ahora del **Centro de Investigación en Computación (CIC)** es para mí motivo de gran orgullo y satisfacción, a la vez de representar un enorme compromiso para llevar dignamente los valores y objetivos de mi *Alma Mater*.

Agradezco al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT)**, en conjunto con la **Secretaría de Investigación y Posgrado (SIP)** y el **Centro de Investigación en Computación (CIC)**, por el apoyo brindado con las instalaciones y equipo necesarios para realizar la presente investigación, además de haberme apoyado económicamente con las becas ofrecidas.

Además, también debo hacer mención de mi director de tesis, el **Dr. René Luna García**, ya que me brindó sus conocimientos y su tiempo para resolver las dudas que se me fueron presentando. Así mismo quiero mencionar que no sólo fue director de mi tesis, sino además un amigo al sufrir y celebrar junto a mí todas mis fallas y logros dentro del CIC. Gracias por todo el apoyo y confianza depositada en mí durante la realización de este trabajo y por la paciencia que me tuvo.

También quiero agradecer a **mis padres (Ofelia y Claudio) y hermano (Pedro Alonso)**, que sin su ayuda, consejos, regaños y palabras de aliento nunca hubiera llegado tan lejos y no escribiría estas palabras. Gracias por siempre creer en mí, los amo.

En esta ocasión, quiero expresar mi más sincero y profundo agradecimiento a **Migdaled**, esa persona especial que conocí en el CIC, esa persona que me apoyó y me ayudó con sus palabras de aliento a terminar lo que ya había empezado, que incluso me ayudó en la redacción del presente documento, además de ser compañera mía en esta etapa de mi vida. Con ella viví muchas cosas durante la estancia en el CIC, pero lo más importante es que está conmigo en las buenas y en las malas. Gracias amor por tu apoyo y comprensión. Te amo.

Es mi deseo agradecer también a mis **amigos** Araceli, Brayan, David, Edwin, Enrique, Netz, Nico, Shatagua y Simón; quienes con sus juegos y apoyo siempre me hicieron sentir bien dentro del Centro y que de alguna u otra forma colaboraron en la realización de esta tesis. Un especial agradecimiento a Juan Carlos con quien compartí ideas, horas de trabajo, de deporte y de viaje.

Al **jurado** que examinó la tesis y que fueron parte de éste proceso, gracias por enriquecer este trabajo con sus observaciones y comentarios.

CONTENIDO

RESUMEN.....	iv
ABSTRACT.....	v
CAPÍTULO I. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	14
1.1 INTRODUCCIÓN.....	14
1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA	15
1.3 OBJETIVO GENERAL	15
1.4 OBJETIVOS PARTICULARES.....	15
1.5 JUSTIFICACIÓN.....	15
1.6 ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO	16
CAPÍTULO II. ESTADO DEL ARTE	18
2.1. MODELOS MATEMÁTICOS	18
2.1.1. Modelos Macroscópicos.....	19
2.1.2. Modelos Microscópicos.....	20
2.1.3. Modelos Cinéticos.....	22
2.2. MODELOS COMPUTACIONALES	22
2.2.1. Algoritmo de Colonia de Hormigas	23
2.2.2. Algoritmo de Enjambre de Partículas	23
2.2.3. Algoritmos Genéticos	24
CAPÍTULO III. MARCO TEÓRICO	25
3.1. ENFOQUE GLOBAL	25
3.2. MODELO BÁSICO	26
3.3. MODELOS DE PRIMER ORDEN.....	27
3.3.1. Modelo de Lighthill-Whitham-Richards (LWR)	28
3.3.2. Modelo de Lighthill-Whitham con difusión (LWD).....	28
3.3.3. Modelo de Nelson.....	29
3.3.4. Modelo de Jordan	30
3.4. MODELOS DE SEGUNDO ORDEN	30
3.4.1. Modelo de Kerner-Konhäuser	31
3.5. MODELOS DE ORDEN SUPERIOR	32
3.6. APROXIMACIÓN NUMÉRICA	33
3.6.1. Solución numérica de la ecuación de advección.....	33

3.6.2.	Método de diferencias finitas.....	35
3.7.	MODELOS LOCALES.....	36
3.7.1.	Flujo máximo	37
3.7.2.	Algoritmo Ford–Fulkerson	37
3.7.3.	Algoritmo Edmonds–Karp	38
3.8.	OPTIMIZACIÓN.....	38
3.8.1.	Conceptos matemáticos	39
3.8.1.1.	Conjunto de nivel	39
3.8.1.2.	Gradiente	41
3.8.1.3.	Matriz hessiana.....	41
3.8.2.	Métodos de optimización.....	42
3.8.2.1.	Optimización por punto único con base en la derivada.....	44
3.8.2.2.	Optimización local y global.....	48
3.8.2.3.	Optimización Multiobjetivo.....	48
3.8.2.4.	Búsqueda Local	50
3.9.	CÓMPUTO EN PARALELO.....	52
3.9.1.	MPI.....	53
3.9.2.	ROOT.....	54
3.10.	AJUSTE DE CURVAS	55
3.10.1.	Histograma	56
3.10.1.1.	Definición matemática.....	58
3.10.2.	Ajuste de datos a una distribución de probabilidad.....	59
3.10.3.	Prueba chi cuadrada de Pearson.....	62
3.10.4.	Prueba de Kolmogórov–Smirnov	62
3.10.5.	Prueba de Anderson–Darling.....	63
	CAPÍTULO IV. METODOLOGÍA	64
4.1.	CONSTRUCCIÓN DEL GRAFO	65
4.2.	FUNCIONES OBJETIVO	66
4.3.	BÚSQUEDA DE CONFIGURACIÓN INICIAL FACTIBLE	67
4.4.	OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES OBJETIVO.....	68
4.5.	BÚSQUEDA Y OPTIMIZACIÓN EN PARALELO.....	68
4.6.	ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	70
	CAPÍTULO V. RESULTADOS	74

5.1.	EXPERIMENTO 1: GRAFO CON 6 NODOS Y 10 ARISTAS	74
5.2.	EXPERIMENTOS CON DATOS DE GOOGLE MAPS.....	76
5.2.1.	Experimento 2: Lunes 9:00 a.m., México D.F.....	76
5.2.2.	Experimento 3: Viernes 7:00 p.m., México D.F.	81
5.2.3.	Experimento 4: Predicción del comportamiento del tránsito ante el cierre de una vialidad.....	84
CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO.....		88
6.1.	CONCLUSIONES.....	88
6.2.	TRABAJO FUTURO.....	88
APÉNDICE A.....		90
A.1.	COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO PSO Y EL MÉTODO OCN.....	90
APÉNDICE B.....		92
B.1.	EXPERIMENTO 1: GRAFO 4 NODOS Y 6 ARISTAS.....	92
B.2.	EXPERIMENTO 2: GRAFO 19 NODOS Y 64 ARISTAS.....	93
B.3.	EXPERIMENTO 3: GRAFO 50 NODOS Y 213 ARISTAS.....	95
B.4.	EXPERIMENTO 4: GRAFO 75 NODOS 320 ARISTAS	96
BIBLIOGRAFÍA.....		98

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Ejemplo de curvas de nivel para una función.....	39
Figura 2. Ejemplo de isosuperficies o superficies de nivel.....	40
Figura 3. Curvas integrales paralelas a las curvas de nivel de la función.....	40
Figura 4. Búsqueda por punto único con base en la derivada.....	46
Figura 5. Ejemplo de una función unimodal dos veces diferenciable.....	46
Figura 6. Búsqueda por punto único sustituyendo la matriz hessiana por la matriz identidad.....	47
Figura 7. Ejemplo de los diferentes «picos» y puntos de ensilladura de una función.....	48
Figura 8. Diagrama general del proceso de optimización multiobjetivo.....	51
Figura 9. Diagrama del proceso de optimización multiobjetivo con un enfoque paralelo.....	52
Figura 10. Esquema comparativo entre el cómputo en serie y el cómputo en paralelo.....	53
Figura 11. Captura de pantalla de un histograma desarrollado con el framework ROOT.....	55
Figura 12. Ejemplo de un histograma para una función de densidad de probabilidad.....	57
Figura 13. Ejemplo de un diagrama de frecuencias.....	57
Figura 14. Ejemplo de una distribución de probabilidad ajustada a los datos de un histograma.....	61
Figura 15. Metodología propuesta.....	64
Figura 16. Representación visual de la construcción del grafo a partir de una red vehicular.....	66
Figura 17. Metodología propuesta para búsqueda y optimización en paralelo.....	69
Figura 18. Ejemplo de archivo de salida.....	70
Figura 19. Ejemplo de histograma de flujo para los resultados obtenidos.....	70
Figura 20. Ejemplo una distribución normal ajustada al histograma.....	71
Figura 21. Captura de pantalla de la herramienta de visualización.....	73
Figura 22. Representación gráfica del grafo.....	74
Figura 23. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.....	75
Figura 24. Situación que presentan las vías principales de la Ciudad de México el día lunes a las 9:00 a.m.....	77
Figura 25. Mapa de la Ciudad de México con el modelado del tránsito vehicular.....	77
Figura 26. Modelado de las principales vialidades de la Ciudad de México permitiendo que 60% de ellas tengan contraflujos.....	78
Figura 27. Modelado de las principales vialidades de la Ciudad de México permitiendo que 70% de ellas tengan contraflujos.....	79

Figura 28. Modelado de las principales vialidades de la Ciudad de México permitiendo que 80% de ellas tengan contraflujos.....	79
Figura 29. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.....	80
Figura 30. Situación que presentan las vías principales de la Ciudad de México el día viernes a las 7:00 p.m.	81
Figura 31. Mapa de la Ciudad de México con el modelado del tránsito vehicular.	82
Figura 32. Modelado de las principales vialidades de la Ciudad de México permitiendo que 85% de ellas tengan contraflujos.....	82
Figura 33. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.....	83
Figura 34. Situación del tránsito vehicular ante el cierre de una vialidad.....	84
Figura 35. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.....	85
Figura 36. Situación del tránsito vehicular ante el cierre de una vialidad.....	86
Figura 37. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad Weibull.....	87
Figura 38. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad beta.....	92
Figura 39. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.	92
Figura 40. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad beta.....	93
Figura 41. Histograma del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.	94
Figura 42. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.....	95
Figura 43. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.	95
Figura 44. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.....	96
Figura 45. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.	97

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Clasificación de los modelos de tránsito vehicular.....	19
Tabla 2. Clasificación de los métodos de optimización.....	44
Tabla 3. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	72
Tabla 4. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	72
Tabla 5. Configuración de valores para el grafo.....	75
Tabla 6. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	76
Tabla 7. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	76
Tabla 8. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	80
Tabla 9. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	80
Tabla 10. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	83
Tabla 11. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	83
Tabla 12. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	85
Tabla 13. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	85
Tabla 14. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	87
Tabla 15. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y weibull), para el histograma de los flujos del grafo.....	87
Tabla 16. Comparación entre los tiempos de optimización usando el método PSO y el método OCN.....	90
Tabla 17. Relación de los grafos construidos con el tiempo que tardan en converger a una solución.....	91
Tabla 18. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	93
Tabla 19. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	93
Tabla 20. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	94
Tabla 21. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	94
Tabla 22. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	96
Tabla 23. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	96

Tabla 24. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.....	97
Tabla 25. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.....	97

Capítulo I. Definición del problema

1.1 Introducción

Históricamente, el estudio y modelado del tránsito vehicular tienen sus orígenes en los años 30's cuando el investigador norteamericano Bruce Douglas Greenshields aplicó por primera vez métodos fotográficos y matemáticos para la medición de diferentes variables relacionadas con el flujo de tránsito vehicular y la descripción de su comportamiento [23]. Fue el mismo Greenshields quien, posteriormente, postuló la existencia de una relación lineal entre la velocidad y la densidad del tránsito [24].

Años más tarde surgieron los primeros planteamientos en la teoría del flujo de tránsito vehicular [41], en los cuales se confirmaron los postulados de Greenshields y la existencia de una estrecha relación entre las variables fundamentales del flujo de tránsito vehicular: la velocidad v , la densidad ρ y el flujo ϕ .

Actualmente existen tres enfoques teóricos para modelar el tránsito vehicular [35]:

- 1) Los *modelos macroscópicos* describen el flujo de tránsito de manera análoga a como sucede en los líquidos o gases en movimiento, es por esto que en ocasiones se les llama *modelos hidrodinámicos* [65]. Estos modelos son capaces de describir fenómenos colectivos como la evolución del congestionamiento vial en una determinada región o la velocidad de propagación de las ondas de tráfico. Sus principales variables de estudio son la densidad de tránsito $\rho(x, t)$, el flujo $\phi(x, t)$ y la velocidad promedio $v(x, t)$.
- 2) Los *modelos microscópicos*, a su vez, analizan el flujo de tránsito vehicular considerando lo que sucede con cada vehículo de manera individual en cada instante de tiempo. En ellos se describe la reacción de cada conductor (aceleración, frenado, cambio de carril, etc.), dependiendo de su entorno. Este tipo de modelos pueden ser estudiados utilizando modelos *car-following* [11, 21, 59] y autómatas celulares [48, 61]. Sus principales variables de estudio son la posición de los vehículos $x_\alpha(t)$, su velocidad $v_\alpha(t)$ y aceleración $\dot{v}_\alpha(t)$.
- 3) Los *modelos cinéticos* combinan los enfoques de los modelos microscópicos y macroscópicos en un modelo híbrido, en los cuales, las secciones críticas de la red de flujo de tránsito vehicular se describen mediante algún modelo microscópico, mientras que, el resto de la red de flujo se estudia con algún modelo macroscópico [65]. También se recurre al empleo de ecuaciones cinéticas de Boltzmann para su análisis [26, 57, 66, 67].

Es de nuestro particular interés el estudio de los modelos macroscópicos.

1.2 Descripción del Problema

Las sociedades modernas requieren contar con sistemas eficientes de transporte que permitan llegar a los destinos deseados a tiempo y de manera segura. Desafortunadamente la infraestructura vial existente cuenta con recursos limitados, algunos de ellos con capacidad reducida, y además el incremento de sus usuarios es una constatación diaria; por lo tanto, es necesario encontrar soluciones y contar con estrategias que permitan la toma de decisiones para prevenir y minimizar la congestión de tránsito vehicular.

1.3 Objetivo General

Proponer un modelo de tránsito vehicular que permita modelar y optimizar el comportamiento de flujo de tránsito vehicular a partir de una representación de ecuaciones de flujo dentro de un grafo dirigido.

1.4 Objetivos Particulares

- ✓ Analizar la teoría concerniente al modelado de flujo de tránsito vehicular.
- ✓ Estudiar los modelos continuos de flujo vehicular.
- ✓ Proponer un modelo de flujo de tránsito vehicular que modele el flujo dentro de un grafo dirigido con capacidades máximas y mínimas.
- ✓ Proponer un método de optimización multiobjetivo para el flujo de tránsito vehicular del modelo propuesto.
- ✓ Validar los resultados del modelo propuesto.

1.5 Justificación

El problema del transporte es un problema que ha concernido al hombre mucho antes, incluso, de la llegada del automóvil; pero ha sido en años recientes que el tema de los congestionamientos viales ha adquirido una mayor importancia. Hoy en día, el constante aumento de vehículos en la infraestructura vial y la mala planificación de las vías de transporte han propiciado congestionamientos en varios puntos de las grandes urbes, y los embotellamientos de vehículos se han convertido en uno de los grandes problemas que hay que afrontar a diario; aunado a esto se tienen otras repercusiones tanto en la calidad de vida de las personas como en el medio ambiente, por mencionar algunos encontramos el aumento en los costos de operación de los vehículos (gasolina, mantenimiento, etc.), incremento en el número de accidentes, aumento de las emisiones de agentes contaminantes, presencia de estrés en los conductores y agravamiento de la calidad del aire.

A pesar que los problemas de movilidad en las ciudades son claros, las posibles soluciones a estos son contradictorias y se encuentran en etapas prematuras, es aquí donde destaca el importante papel

de la investigación. Construir simplemente más caminos no es la solución, y como lo enuncia [63] en su *ley fundamental del congestionamiento en autopistas*: «la demanda latente se expande para ocupar el espacio creado siempre que se mejora la capacidad de las carreteras». Un ejemplo de esto se puede encontrar en la paradoja de Braess para el tránsito vehicular [6], la cual menciona: «ampliar una red vial causará una redistribución del tránsito vehicular que resultará en mayores tiempos individuales de viaje», dicho de otra forma, conductores individuales no coordinados siguiendo sus estrategias óptimas personales no siempre logran el estado más benéfico para el tráfico en su conjunto.

Es por ello que surge la necesidad de estudiar y desarrollar modelos concernientes al flujo de tránsito vehicular que permitan entender las causas y consecuencias de los fenómenos que en éste se presentan, y a su vez, permitan contar con estrategias para la toma de decisiones y así prevenir y/o minimizar los congestionamientos vehiculares.

La optimización de la infraestructura vial requiere reproducir situaciones de tránsito que permitan realizar pruebas de investigación, lo cual es complicado, pues produciría situaciones difíciles como congestionamientos, accidentes viales, etc. Ha sido a través de las investigaciones y estudios realizados por varios científicos que se han obtenido propiedades del tránsito y modelos que resultan útiles para realizar simulaciones, por medio de las cuales, es posible establecer y manipular variables y condiciones del entorno y conocer el efecto que esto tendría en el comportamiento del tránsito vehicular en una determinada región; debido a lo anterior es que actualmente se le da gran importancia al modelado y simulación de flujo de tránsito de vehículos, ya que, permite obtener datos sobre su dinámica sin necesidad de interferir en el lugar mismo.

En el presente trabajo propone un modelo de flujo de tránsito vehicular que permita modelar el comportamiento del tránsito vehicular a partir de una representación en un sistema de ecuaciones de flujo dentro de un grafo direccionado.

1.6 Organización del Documento

Este trabajo consta de 6 capítulos, organizados de la siguiente manera:

El capítulo I, plantea la problemática del estudio del tránsito vehicular, los objetivos generales y particulares del presente trabajo, y la justificación del problema.

El capítulo II, presenta el estado del arte, esto es, se muestra un panorama general de la investigación realizada en el ámbito de la teoría del flujo vehicular a través del tiempo.

En el capítulo III, correspondiente al marco teórico, se describen los conceptos necesarios para el desarrollo de esta tesis; esto es, los conceptos de fluidos y la manera en que éstos se emplean para representar ciertos fenómenos observados en el tránsito vehicular. Además, se incluye una descripción de los modelos que sirven de base para el modelo presentado. De igual forma, se detallan los conceptos y métodos matemáticos aplicados en la optimización multiobjetivo.

En el capítulo IV, se describe la metodología desarrollada para la resolución de la problemática planteada en el capítulo I. Se explica el modelo propuesto, la interacción de las ecuaciones de flujo dentro del grafo dadas las capacidades máximas y mínimas por arista, así como las consideraciones necesarias para poder realizar una optimización multiobjetivo, en paralelo, del flujo de tránsito vehicular.

En el capítulo V, se muestran los resultados obtenidos de dicho modelo junto con su interpretación.

En el capítulo VI, se escriben las conclusiones obtenidas y el trabajo futuro que se surge de los resultados obtenidos en esta línea de investigación .

Capítulo II. Estado del arte

Hoy en día el modelado de situaciones y problemas reales ha adquirido gran relevancia para el adecuado funcionamiento de las sociedades modernas, ya que ha sido a través de éste que se han podido explicar, reproducir y solucionar algunos de los fenómenos que se presentan diariamente. En particular, en lo referente al problema del flujo de tránsito vehicular, se han realizado mediciones y se han propuesto diferentes modelos para caracterizar y explicar la gran variedad de fenómenos que el flujo de tránsito exhibe, los entornos en los que se desarrolla, los posibles estados en que se puede apreciar, los factores y condiciones con los que interactúa, así como los medios requeridos para su optimización.

Los modelos de flujo de tránsito vehicular se pueden clasificar con respecto a su nivel de agregación, es decir, con la manera en que representan el fenómeno; por su estructura matemática o por algún otro de sus aspectos conceptuales [65]. Para éste trabajo se clasificarán y explicarán los modelos matemáticos y computacionales para el estudio del flujo de tránsito vehicular, sin llegar a profundizar en el tema.

2.1. Modelos Matemáticos

En la teoría del flujo de tránsito vehicular se puede encontrar diferentes maneras de abstraer los fenómenos que en éste se presentan y modelarlos matemáticamente. Estos modelos se pueden clasificar por su nivel de detalle (microscópico, mesoscópico o macroscópico), por la escala de las variables independientes (continuas o discretas), por la representación de sus procesos (deterministas o estocásticos), por su forma de operación (analítica o simulación), o por la escala de su aplicación (redes, tramos, o intersecciones de las carreteras). En particular, en ésta sección, se describirán únicamente por su nivel de detalle.

La tabla 1 presenta un panorama general de los principales modelos clasificados de acuerdo a los criterios mencionados anteriormente.

Principalmente existen tres modelos: Los modelos macroscópicos en el que destacan el modelo básico de Lighthill y Whitham de 1955 [41], los modelos de aceleración de Payne [51, 52] y Kühne [38], el modelado cinético de gas de Helbing [27] y el modelo hidrodinámico de Pipes [54]. Los modelos microscópicos que incluyen a los modelos car-following de Bando [2] y de Gipps [21], los modelos con autómatas celulares basados en el modelo de Nagel y Schreckenberg de 1992 [48], y el modelo de Fukui e Ishibashi [18], por mencionar algunos. Y finalmente, los modelos cinéticos de Prigogine [56] y de Pavier-Fontana [50].

Nivel de detalle	Modelo	DI ¹				SC ²	RE ³	OP ⁴	AR ⁵								
		v	d	l	o				c	sl	ml	al	d	n	u		
Microscópico	MIXIC	✓		✓	✓	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>s</i>			✓						
	SIMONE	✓	✓	✓	✓	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>s</i>			✓		✓				
	PELOPS	✓		✓	✓	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>s</i>			✓						
	Modelos car-following	✓	✓	✓		<i>c</i>	<i>d,s</i>	<i>a,s</i>		✓	✓						
	FOSIM	✓	✓	✓	✓	<i>d</i>	<i>s</i>	<i>s</i>			✓		✓				
	Autómatas celulares	✓	✓			<i>d</i>	<i>s</i>	<i>s</i>							✓	✓	
	INTEGRATION	✓				<i>d</i>	<i>d</i>	<i>s</i>							✓		
Mesoscópico	Modelos de distribución de avance			✓	✓	<i>c</i>	<i>s</i>	<i>a</i>	✓								
	Modelos de gas cinético reducidos.	✓				<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>				✓					
	Modelos de gas cinético mejorados	✓	✓			<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>				✓					
	Modelos de gas cinético multicarril	✓	✓		✓	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>			✓		✓				
	Modelos de gas cinético multiclase	✓	✓	✓		<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>				✓					
	Modelos multicarril multiclase	✓	✓	✓		<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>			✓	✓	✓				
	Modelos de grupos	✓	✓			<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>				✓					
Macroscópico	Modelo LWR	✓				<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>				✓					
	Modelos tipo Payne	✓				<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>				✓					
	Modelos tipo Helbing	✓			✓	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>a</i>				✓					
	Modelos por células de transmisión	✓				<i>d</i>	<i>d</i>	<i>s</i>					✓				
	METANET	✓				<i>d</i>	<i>d</i>	<i>s</i>					✓				
	Modelo semidiscreto					<i>sd</i>	<i>s</i>	<i>a</i>			✓	✓					
	FREFLO	✓				<i>d</i>	<i>d</i>	<i>s</i>					✓				
MASTER	✓				<i>d</i>	<i>d</i>	<i>a</i>			✓							

Tabla 1. Clasificación de los modelos de tránsito vehicular.

Notas:

1. Dimensión (otra diferente del tiempo y del espacio): velocidad *v*, velocidad deseada *d*, posición lateral *l* (carriles), o algún otro *o*.
2. Escala (continua *c*, discreta *d*, y semi-discreta *sd*);
3. Representación (determinista *d*, estocástica *s*);
4. Operatividad (analítica *a*, simulación *s*);
5. Área de aplicación (cortes transversales *c*, tramos de un solo carril *sl*, tramos de múltiples carriles *ml*, tramos con carriles agregados *al*, discontinuidades *d*, red de autopistas *n*, and red urbana *u*).

2.1.1. Modelos Macroscópicos.

Los modelos macroscópicos describen el flujo vehicular de manera análoga a como se describe un líquido o gas en movimiento, i.e., se fundamentan en el uso de ecuaciones de la dinámica de fluidos. Es por esto que también se les conoce con el nombre de *modelos hidrodinámicos* [65].

En este enfoque se consideran como variables relevantes la densidad de tránsito $\rho(x, t)$, el flujo $\phi(x, t)$, la velocidad promedio $v(x, t)$, y en algunos casos la varianza de la velocidad $\sigma_v^2(x, t)$. La calidad y confiabilidad de los resultados dependen principalmente de la exactitud de las ecuaciones de flujo aplicadas y de la elección de un método de integración numérica conveniente.

De acuerdo con lo anterior, estos modelos son capaces de representar fenómenos colectivos debido a que los automóviles se consideran como partículas que fluyen a través de una red de conductos. Dichos fenómenos pueden ser la evolución de las regiones donde se presentan los congestionamientos viales, la velocidad de propagación de las ondas de tránsito, la evolución de la velocidad promedio, la aparición y evolución de ondas de choque o de soluciones viscosas, entre otros.

Debido a la naturaleza colectiva de los fenómenos que estudian, estos modelos son especialmente útiles cuando no se necesita considerar el efecto que tiene en el flujo de tránsito los cambios de carril de los automóviles, la diversidad de automóviles existentes; o bien, cuando la información de entrada existente proviene de fuentes distintas y presenta características heterogéneas y/o son inconsistentes. Es particularmente importante ésta capacidad de poder incorporar fuentes de datos heterogéneas, puesto que, permite la estimación y predicción en tiempo real de los estados del tránsito vehicular para un horizonte de tiempo τ con actualizaciones cada Δt intervalos de tiempo.

Dentro de los modelos macroscópicos encontramos inicialmente el modelo básico de Lighthill y Whitham (modelo LWR), publicado en 1955 [41], en el cual se introduce una descripción basada en la ecuación de continuidad con la suposición de que el flujo o la velocidad sólo dependen de la densidad, esto es, al no haber un tiempo de relajación se presenta el fenómeno de adaptación instantánea; además de existir la presencia de ondas de choque, i.e., un aumento muy apreciable de la densidad en un intervalo muy corto de longitud y de tiempo [47].

En 1979, Payne propuso sus modelos con ecuación de aceleración en los cuales reemplazó la suposición de la adaptación instantánea de la teoría de Lighthill-Whitham añadiendo una ecuación de inercia, la cual es similar a la ecuación de Navier-Stokes [51]. La contribución de Payne en este trabajo consistió en introducir una ecuación de aceleración adicional para la velocidad media V , la cual incluyó un tiempo de relajación para la velocidad media cada cierto tiempo τ . Por su parte, Kühne en 1984 agregó un término de viscosidad y comenzó a utilizar métodos de la dinámica no lineal [38].

En 1995, Helbing propuso un modelo (modelo H), que usa ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, en el cual, la varianza de la velocidad $\sigma_v^2(x, t)$, es empleada como una cantidad de equilibrio; sin embargo, en situaciones donde no lo hay, puede considerarse como una variable dinámica [25]. En particular para predecir un embotellamiento de tránsito, un incremento en la varianza se considerara como el principal indicador.

2.1.2. Modelos Microscópicos.

En los modelos microscópicos se consideran unidades individuales llamadas *unidades conductor-vehículo* y denotadas como α , las cuales con sus características y comportamiento forman de

manera colectiva el flujo de tránsito global. Además, éstos modelos toman en cuenta características propias del comportamiento humano como: el tiempo de reacción de cada conductor, su grado de cortesía o agresividad, el uso de las luces de cambio (direccionales) o el tiempo para cambiar de carril; así como de características de los automóviles como: el tiempo de aceleración o el tiempo de frenado. Sus principales variables de estudio son la posición $x_\alpha(t)$, la velocidad $v_\alpha(t)$ y la aceleración $\dot{v}_\alpha(t)$ de los vehículos.

Históricamente, los modelos *car-following* fueron los primeros modelos microscópicos en desarrollarse, esto debido primordialmente a la extensa investigación desarrollada en 1958 por la compañía automotriz norteamericana General Motors [28, 29]. Los modelos *car-following* se sustentan en las leyes de estímulo-respuesta (conductismo), en donde la respuesta al cambio en la velocidad se mide por la aceleración, y dicho estímulo, puede tener distintos orígenes permitiendo así la obtención de diferentes modelos. A pesar de la variación de los modelos, todos ellos suponen la existencia de una relación lineal entre la velocidad y el espaciamiento entre vehículos, o bien, entre la aceleración y la diferencia de velocidades entre vehículos consecutivos.

Los modelos de *car-following* de una sola vía, como los de Rothery [59], suponen la existencia de una alta correlación entre los vehículos cuyo rango de separación intervehicular es de 100 a 125 metros. En ellos se asume que el conductor es un agente activo que responde a estímulos sensoriales y esto se refleja en la aceleración o desaceleración del vehículo, dependiendo de sus propias habilidades psicomotoras, así como de las condiciones físicas del automóvil y del camino. Estos tipos de modelos también exponen un mecanismo de conducción, en el cual, el conductor realiza tres tareas: la percepción, a través de la cual recaba información de su entorno; la decisión, que es la interpretación de la información; y finalmente, la ejecución de maniobras de control.

Otra de las contribuciones que se ha realizado a la teoría de los modelos microscópicos son los modelos con autómatas celulares (AC), también conocidos como modelos de salto. Los autómatas celulares son sistemas que evolucionan en el tiempo con base en reglas locales y tanto el tiempo como el espacio fase son discretos. En estos modelos el camino se representa por cadenas de celdas que están ocupadas por a lo más una partícula y el movimiento tiene lugar saltando entre celdas, mientras que la posición de las partículas es actualizada simultánea y paralelamente. Éste enfoque ha tenido gran aceptación dentro de los modelos microscópicos, debido a que, permiten observar de manera directa las interacciones individuales de los automóviles y relacionarlas con características del flujo de tránsito; además, permiten que diferentes vehículos tengan diferentes comportamientos al conducir.

El uso de modelos de autómatas celulares se remonta a Gerlough [19, 20], y a Cremer y Ludwig [12] quienes posteriormente realizaron diferentes extensiones a estos. En 1992 Biham, Middleton y Levine [4] usaron un modelo de AC con velocidad máxima para tráfico bidimensional, y unidimensional de varios carriles. En el mismo año, Kai Nagel y Michael Schreckenberg [48] propusieron un modelo probabilístico con velocidad máxima $v_{max} = 5$ que se comparó favorablemente con los datos reales, el cual ha sido retomado y extendido subsecuentemente por diversos autores [47].

En el año 2000 Knospe, Santen, Schadschneider y Schreckenberg publicaron el modelo de tránsito vehicular K-S-S-S [36] usando un autómata celular basado en el modelo Nagel-Schreckenberg y que

modela el flujo de tránsito tomando en cuenta el uso de luces de freno que avisan a los vehículos sucesores sobre posibles reducciones de velocidad, provocando así un flujo más suavizado al conducir. Posteriormente, en el año 2002, Knospe *et al.* propusieron el modelo K-S-S-S_2 [37] para análisis de flujo de tránsito en dos carriles.

2.1.3. Modelos Cinéticos.

Los modelos cinéticos, también conocidos como *modelos mesoscópicos*, combinan los enfoques de los modelos macroscópicos y microscópicos en un modelo híbrido, en el cual, los parámetros microscópicos (velocidad individual de los vehículos, espacio intervehicular, etc.), pudieran depender de cantidades macroscópicas como la densidad, la velocidad local o la varianza de la velocidad.

En estos modelos, la dinámica del flujo de tránsito vehicular generalmente consiste de una simplificación que, mientras captura lo esencial del flujo de tránsito, requiere menos demanda de información y son computacionalmente más eficientes. Existen dos aproximaciones principales: aquellas en las que no se consideran vehículos de manera individual sino que son agrupados en pelotones o caravanas que se mueven a lo largo de la red de flujo (permitiendo la existencia de pelotones de un solo vehículo), como en el modelo de Leonard y colaboradores [40]; y aquellos en los que la dinámica del flujo está determinada por la dinámica simplificada de los vehículos individuales, como es el caso en [33]. Otra de las principales diferencias recae en el manejo del tiempo, los enfoques más comunes [16, 33, 42] se basan en tiempo síncrono, es decir, el tiempo en el modelo avanza cada Δt unidades de tiempo; mientras que, por otro lado, se encuentran los modelos orientados a eventos que utilizan tiempo asíncrono, i.e., el estado del modelo cambia cuando sucede algún evento predefinido [8].

Como parte del estado del arte de los modelos cinéticos se encuentran los modelos cinéticos de gas (*Gas-kinetic traffic models*, por su nombre en inglés); los cuales usan *colisiones* ideales para describir la dinámica de una cantidad llamada *densidad espacio-fase* $\rho'(x, v, t)$, la cual es una relación entre la densidad de tránsito y la distribución de probabilidad local de la velocidad de los vehículos. El modelo de Prigogine [56] es un ejemplo de ésta aproximación y considera que la cantidad básica es una función de distribución $f(x, v, t)$ que describe el número de vehículos en una cierta localización y velocidad en el tiempo t . A su vez, en el trabajo realizado por Pavoni-Fontana [50], se introduce una función de distribución generalizada a la de Prigogine, esta función $g(x, v, t; w)$ describe el número de vehículos con velocidad v y velocidad deseada w .

2.2. Modelos Computacionales

Desde la llegada de las supercomputadoras en la década de los años 60's, los científicos han tenido en ellas la oportunidad de comprobar sus investigaciones en un breve periodo de tiempo, sobre todo aquellas relacionadas con grandes y complejos fenómenos del mundo real. Todos estos sistemas han evolucionado a lo largo del tiempo para ofrecer cada vez mejores índices de desempeño, resultados más precisos y reducción en los tiempos de ejecución; pero de nada sirve contar con todos estos

equipos si no se desarrollan métodos y algoritmos eficientes que aprovechen al máximo los recursos disponibles.

En ésta sección se describe de manera breve algunos de los modelos computacionales más utilizados en el ámbito del modelado de tránsito vehicular.

2.2.1. Algoritmo de Colonia de Hormigas

El algoritmo de la colonia de hormigas o ACO por sus siglas en inglés (Ant Colony Optimization), es una técnica de optimización que tomó como inspiración las colonias de hormigas y su habilidad para organizarse como conjunto para localizar y recolectar alimento sin el control de una unidad central coordinadora. Dorigo [15] propuso el primer algoritmo de colonia de hormigas para optimizar problemas discretos, aunque su aplicación en la optimización de modelos de flujo de tránsito vehicular fue posible cuando se realizaron extensiones a éste modelo para problemas continuos [5, 43]. En estos algoritmos, el comportamiento de los conductores es simulado asumiendo que ellos eligen su ruta óptima que resulta de considerar las condiciones de viajar la distancia más corta y rápida con el menor número de cambios de ruta posibles. En el modelo [17], los conductores eligen la ruta óptima entre dos puntos considerando la longitud del camino y el congestionamiento de las carreteras. Como estos, otros ejemplos se pueden encontrar en la bibliografía [14, 30, 32].

2.2.2. Algoritmo de Enjambre de Partículas

Los algoritmos de enjambre de partículas o PSO por sus siglas en inglés (Particle Swarm Optimization), son técnicas de optimización estocásticas basadas en poblaciones e inspiradas en los movimientos de los enjambres de algunos animales. Estos métodos se atribuyen originalmente a los investigadores Kennedy, Eberhart [34] y Shi [62].

Ésta técnica permite optimizar un problema a partir de una población de soluciones candidatas, denotadas como *partículas*, moviendo éstas por todo el espacio de búsqueda según reglas matemáticas que tienen en cuenta la posición y la velocidad de las partículas. El movimiento de cada partícula se ve influido por su mejor posición local hallada hasta el momento, así como por las mejores posiciones globales encontradas por otras partículas a medida que recorren el espacio de búsqueda. El fundamento teórico de éste algoritmo es hacer que el enjambre de partículas converja rápidamente hacia las mejores soluciones. Al tratarse de una técnica metaheurística no garantiza la obtención de una solución óptima en todos los casos, puesto que asume pocas o ninguna hipótesis sobre el problema a optimizar y puede aplicarse en grandes espacios de soluciones candidatas.

En lo relacionado con la aplicación de éstos métodos en la teoría de tránsito vehicular encontramos que [64] dio solución a la detección oportuna de incidentes de tránsito vehicular usando un algoritmo tipo PSO, y [1] propone un sistema de control de coordinación para el tránsito en redes viales urbanas.

2.2.3. Algoritmos Genéticos

En 1975, John Holland presenta su trabajo titulado «*Adaptation in Natural and Artificial Systems*» [31], a partir del cual se empieza a construir el estudio de los algoritmos genéticos, surgiendo así una de las líneas más prometedoras de la inteligencia artificial. Son llamados algoritmos genéticos porque se inspiran en la evolución biológica y su base genético-molecular. Estos algoritmos hacen evolucionar una población de individuos someténdola a acciones aleatorias semejantes a las que actúan en la evolución biológica (mutaciones y recombinaciones genéticas), así como también a una selección de acuerdo con algún criterio, en función del cual se decide cuáles son los individuos más adaptados, que sobreviven, y cuáles los menos aptos, que son descartados.

Un algoritmo genético es un método de búsqueda dirigida basada en probabilidad. Bajo una condición muy débil: que el algoritmo mantenga elitismo, i.e., que mantenga siempre al mejor elemento de la población sin hacerle ningún cambio, se puede demostrar que el algoritmo converge al óptimo; en otras palabras, al aumentar el número de iteraciones, la probabilidad de tener el óptimo en la población tiende a uno.

Muchos son los autores que han aplicado los conocimientos de ésta área para el modelado, pero sobre todo, para la optimización del flujo de tránsito vehicular; por mencionar algunos, en [68] se propone un modelo para la optimización de la coordinación de las señales de tránsito en las intersecciones de las carreteras basado en algoritmos genéticos; por su parte [22] presenta un algoritmo genético como una posible solución para el problema de la coordinación de las luces de tránsito. En [9] presenta un algoritmo genético auto-adaptativo para dar solución al problema del re-entramiento del flujo de tránsito vehicular en una red de carreteras.

Capítulo III. Marco teórico

3.1. Enfoque global

En éste tipo de modelos, el flujo de vehículos en una vía se concibe como un flujo compresible de un fluido descrito por variables macroscópicas asociadas al comportamiento colectivo del sistema. Se requiere de un número grande de vehículos circulando en la carretera, de manera que hablar de variables como la densidad, la velocidad promedio, y algunas otras que proporcionen una medida significativa del comportamiento del flujo.

Los modelos macroscópicos están restringidos a la descripción de variables colectivas, es decir variables que no distinguen a cada vehículo y que reflejan cantidades promediadas.

Al describir el flujo de tránsito de manera análoga a como sucede en los líquidos o gases en movimiento en ocasiones se les llama *modelos hidrodinámicos* [65]. Sus principales variables de estudio son la densidad de tránsito $\rho(x, t)$, el flujo $\Phi(x, t)$ y la velocidad promedio $v(x, t)$, sin embargo no son las únicas. El número de variables a tomar en cuenta en el modelado dependerá de la información que se tenga disponible y del grado de detalle con que se quiera describir el problema y la solución.

En la literatura se han desarrollado modelos de diferentes tipos, que consideran variables distintas en su descripción, lo importante es poder verificar la consistencia de sus resultados y su poder predictivo.

Los fundamentos matemáticos de todos los modelos macroscópicos de flujo de tránsito vehicular consisten, básicamente, en la relación hidrodinámica descrita en la ecuación (7) y la ecuación de continuidad, la cual describe la evolución temporal de la densidad en función de la diferencia de flujos. La velocidad macroscópica de los vehículos está definida de forma que, satisfaga dicha relación hidrodinámica y, la ecuación de continuidad es derivada directamente de la conservación del flujo de vehículos. Por lo tanto, ambas ecuaciones son ecuaciones de parámetros libres y se mantienen para cualquier modelo macroscópico arbitrario.

A pesar de que los modelos macroscópicos tienen base en la dinámica de fluidos, es necesario tomar en cuenta la existencia de diferencias esenciales entre el flujo de vehículos y el flujo de líquidos o gases:

1. En un fluido cada partícula es isotrópica y reacciona a estímulos de las demás partículas que lo rodean, mientras que un vehículo se considera anisótropo y responde sólo a estímulos de los vehículos en frente suyo.
2. La ley de conservación del momento se mantiene para fluidos pero no para tráfico vehicular.
3. El número de vehículos es mucho menor que el número de partículas en un fluido.
4. Un vehículo es un sistema vivo, dado que, el conductor tiene personalidad propia y ésta se mantiene, prácticamente, sin cambios durante su trayecto.

5. No pueden existir automóviles con velocidad negativa.

De acuerdo con Aw y Rascle [1], todo buen modelo macroscópico de flujo de tránsito vehicular necesita reunir al menos la siguiente lista de requerimientos:

1. El sistema debe ser hiperbólico. (Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación).
2. Las velocidades de propagación de las ondas en cualquier solución de cualquier problema debe de ser a lo más igual a la velocidad promedio.
3. Frenar debe de producir ondas de choque, cuya velocidad de propagación debe de ser negativa o no-negativa; mientras que acelerar debe de producir ondas de rarefacción (proceso por el que un cuerpo o sustancia se hace menos denso), lo cual, en cualquier caso, satisface la condición anterior.

La condición 1 refiere a que los vehículos no pueden ser creados ni destruidos. La condición 2 debate la existencia de características más rápidas que el tránsito. La condición 3 es sugerida de la observación directa del tránsito real y refiere a la existencia de un tiempo de reacción de los conductores ante eventos frente y detrás de ellos.

3.2. Modelo Básico

Primero vamos a considerar que el flujo de vehículos ocurre a lo largo de una carretera y que sólo tenemos un carril, donde los vehículos avanzan en una dirección, de manera que realmente tenemos un problema unidimensional y unidireccional. Además, consideramos que la carretera en cuestión es un circuito cerrado donde hay un número fijo de vehículos. En este caso prestamos atención a la densidad y las condiciones del problema nos permiten escribir que:

$$\text{Número total de vehículos} = \int \rho(x, t) dx = \text{constante} \quad (1)$$

Con el objeto de pasar a una ecuación de evolución para la densidad, consideremos un tramo de la carretera situado entre $[l_1, l_2]$, el cambio temporal estará dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{l_1}^{l_2} \rho(x, t) dx = \frac{\text{vehículos}_{l_1}}{\text{tiempo}} - \frac{\text{vehículos}_{l_2}}{\text{tiempo}} \quad (2)$$

El número de carros por unidad de tiempo que entran en l_1 menos el número de carros por unidad de tiempo que salen de l_2 , es decir, el flujo de automóviles en el tramo l_1-l_2 . El número de vehículos por unidad de tiempo que salen o entran de un tramo de carretera es el flujo, por lo tanto la ecuación (2) la podemos reescribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{l_1}^{l_2} \rho(x, t) dx = \phi(l_1, t) - \phi(l_2, t) \quad (3)$$

Si suponemos que el flujo vehicular es una función lo suficientemente regular como para aplicar el teorema fundamental de cálculo, tendremos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{l_1}^{l_2} \rho(x, t) dx = - \int_{l_1}^{l_2} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} dx \quad (4)$$

Esto es válido para cualquier tramo de carretera y para cualquier $t > 0$ por lo que se cumple:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

Que es la bien conocida ecuación de continuidad. Cabe notar que la ecuación (5) es válida cuando hay conservación de la cantidad que la satisface, en este caso la densidad. Se puede extender la definición anterior al caso cuando hay fuentes de entrada y salidas de vehículos:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \phi_{in}(x, t) - \phi_{out}(x, t) \quad (6)$$

Donde ϕ_{in} y ϕ_{out} corresponden al número de vehículos por unidad de tiempo que entran y salen al carril en estudio en la posición x al tiempo t , hay que considerar que estas cantidades deben de tomarse como datos y no están determinadas por la dinámica del sistema.

Para la ecuación (1) de densidad dada podemos observar que la velocidad promedio interviene explícitamente, dado que el flujo está dado por

$$\phi(x, t) = \rho(x, t)V(x, t) \quad (7)$$

Las ecuaciones modeladas son ecuaciones en derivadas parciales y además contienen términos no lineales; esto implica que debemos estudiar las características de estas ecuaciones y los métodos numéricos que permitan obtener una solución adecuada.

Podemos clasificar a los modelos de acuerdo con el número de variables a considerar durante el estudio, siendo los modelos de primer orden aquellos que sólo consideran a la densidad como variable relevante, y los que consideran a la densidad y la velocidad promedio se les denominan modelos de segundo orden o modelos tipo Navier-Stokes. Asimismo, los modelos que consideran un número mayor de variables les podemos llamar “modelos de orden superior”.

3.3. Modelos de primer orden

Los modelos que se presentan a continuación son modelos de primer orden, es decir, incluyen una ecuación constitutiva que nos dice como varía la velocidad promedio con la densidad, esto con el objetivo de cerrar la ecuación de continuidad que acabamos de describir.

3.3.1. Modelo de Lighthill-Whitham-Richards (LWR)

En el modelo Lighthill-Whitham-Richards (LWR) publicado en 1955, se incluye la ecuación de Greenshields como ecuación constitutiva para el flujo vehicular:

$$\phi(\rho) = \rho V_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad (8)$$

Siendo V_{max} la máxima velocidad permitida en la carreteta y ρ_{max} la máxima densidad; los valores típicos para estas variables son: $V_{max} = 120$ km/h y la densidad ρ_{max} en el intervalo de 140 - 160 vehículos/km. La ecuación de Greenshields representa de manera cualitativa las características que se han observado en el flujo vehicular como la de tomar el máximo valor a densidades bajas y el mínimo valor a densidades altas. También esta ecuación nos dice que el flujo es función de (x, t) sólo a través de la densidad.

Al realizar la sustitución de la ecuación constitutiva (8) en la ecuación de continuidad (5) obtendremos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_{max} \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

Si hacemos un cambio lineal en la ecuación (9) en la escala de densidad $\rho = \rho_{max} \left(\frac{1-\rho'}{2}\right)$ y tomamos variables adimensionales $x' = \rho_{max}x$, $t' = \rho_{max}V_{max}t$, obtendremos la ecuación de Burgers sin viscosidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

Este modelo presenta ondas de choque, es decir, un aumento muy apreciable de la densidad en un intervalo muy corto de longitud. Esta característica no es deseable en los modelos de tránsito, sobre todo porque los datos experimentales no muestran esas propiedades. En los datos reales podemos apreciar la formación de cúmulos y embotellamientos, pero no ocurren de manera espontánea. Esto significa que el modelo que estamos trabajando no arroja resultados realistas y por lo tanto no es una buena representación de nuestro problema.

3.3.2. Modelo de Lighthill-Whitham con difusión (LWD)

Considera una modificación para evitar la aparición de la onda de choque en el modelo LWR. En 1974 Lighthill eligió una ecuación constitutiva diferente:

$$\phi(\rho) = \rho V_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) - D \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (11)$$

Donde D es una constante positiva llamada coeficiente de difusión. La sustitución directa de la nueva ecuación constitutiva (11) en la ecuación de continuidad (5) nos lleva a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_{max} \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

Se puede observar que la estructura no lineal de la ecuación de Burgers persiste, pero ahora hay un término en segundas derivadas de la densidad, que asemeja a un término de difusión usual. Ésta es la ecuación de Burgers usual, que también se puede escribir en términos de variables adimensionales, tomando $\rho = \rho_{max} \left(\frac{1-\rho'}{2}\right)$, $x' = \rho_{max}x$, $t' = \rho_{max}V_{max}t$ y, el coeficiente de difusión adimensional queda como $D' = \frac{\rho_{max}}{V_{max}}D$. Con lo cual la ecuación queda en forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

3.3.3. Modelo de Nelson

El modelo de Nelson toma como punto de partida el modelo LWD pero éste a su vez modifica el coeficiente de difusión, con el objetivo de lograr la descripción de «flujo sincronizado», el cual es la transición entre los dos sistemas de tránsito: el flujo libre y el flujo congestionado. La manera más simple de entender el concepto se tiene si consideramos una carretera con dos carriles, ambos en la misma dirección de circulación. Bajo ciertas condiciones de densidad alta, sucede que los vehículos van con velocidad constante, aunque diferente en cada carril. Esta situación representa una sincronización entre ambos carriles, que además no permite que los vehículos cambien de carril. Cuando solamente se tiene un carril de circulación, necesitamos tomar un sistema de referencia que se mueva con la velocidad promedio de los vehículos y entonces veremos que hay un frente inmóvil, todo ello a densidad alta.

Nelson usó un coeficiente de difusión dependiente de la densidad, en particular, la ecuación constitutiva que es necesaria para cerrar la ecuación depende de la densidad evaluada en posición y tiempo desplazados

$$V(x, t) = V_e(\rho(x + \lambda - VT, t - T)) \quad (14)$$

Donde T es un tiempo de reacción en que los conductores tratan de ajustar su velocidad en cualquier posición al tiempo t , de manera que T es en realidad un tiempo de retraso en la respuesta. Por otra parte, los conductores tratan de compensar dicho retraso ajustando la densidad a una cierta distancia, adelante de su posición x (distancia de anticipación). Tanto T como λ se consideran cantidades pequeñas y se desarrolla en serie, de manera que el coeficiente de difusión queda de la forma:

$$D(\rho) = -\lambda\rho V'(\rho) - T\rho^2[V'(\rho)]^2 \quad (15)$$

La cantidad $V'(\rho)$ es la derivada de la velocidad, dada por el diagrama $V_e(\rho) - \rho$ respecto de la densidad y es negativa. Su principal problema es que éste coeficiente de difusión puede ser negativo para valores de densidad menores que la máxima. El valor preciso depende del diagrama fundamental que se utilice, cualitativamente esto significa que a partir de ciertas densidades el conductor compensa más de lo necesario.

3.3.4. Modelo de Jordan

En el modelo de Jordan se corrige una de las principales fallas de los modelos de primer orden expuestos anteriormente: al tomar como punto de partida la ecuación de continuidad (5) e introducir una ecuación constitutiva las señales se propagan con rapidez infinita, esto es, una perturbación en el flujo se siente al mismo tiempo en todas las posiciones de la carretera. En el ámbito del tránsito vehicular significa que los conductores reaccionan instantáneamente ante los cambios que se presentan a cualquier distancia delante de ellos.

Este aspecto se ha hecho notar en la literatura y se ha propuesto una corrección a la ecuación constitutiva (5) para el flujo que incluye un tiempo de reacción para los conductores

$$\phi + T_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = V_{max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}} \right) - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (16)$$

Quedando la ecuación para la densidad de la forma:

$$T_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_{max} \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

Ésta ecuación se conoce como “ecuación hiperbólica de Burgers (HBE)”, en la cual T_0 es el tiempo de reacción de los conductores.

La introducción del tiempo de reacción tiene como consecuencia el hecho de que ahora el coeficiente de difusión es $D > 0$ y constante, la velocidad de las señales ya es finita y está determinada por el coeficiente de difusión y el tiempo de reacción. Desde el punto de vista matemático, la introducción de este tiempo cambia de manera fundamental la estructura de la ecuación, ya que ahora en lugar de una ecuación típica de la difusión, es una ecuación de onda.

3.4. Modelos de segundo orden

Los modelos de segundo orden consideran tanto a la densidad $\rho(x, t)$ como a la velocidad $v(x, t)$ entre las variables relevantes en la descripción. Nuevamente la ecuación de continuidad (5) seguirá siendo válida, sin embargo, a diferencia con los modelos de primer orden, ahora necesitamos una ecuación diferencial adicional que nos permita describir la dinámica de ambas variables. Esto significa que además de la ecuación de continuidad tendremos una ecuación para la velocidad y ésta debemos proponerla, o bien deducirla a partir de un modelo cinético. Los modelos de segundo

orden han pasado por varias etapas, pero comparten la similitud con la ecuación de Navier-Stokes en la dinámica de fluidos en régimen compresible.

3.4.1. Modelo de Kerner-Konhäuser

El modelo de Kerner-Konhäuser (modelo K) considera la ecuación de continuidad (5) para la densidad y en lugar de la ecuación constitutiva para el flujo ϕ , propone una ecuación dinámica para él, de esta forma se tiene que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi V + c_0^2 \rho - \eta \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\rho}{\tau} [V_e(\rho) - V] \quad (18)$$

donde $\eta > 0$ es constante y juega un papel semejante a la viscosidad volumétrica en flujo compresible, a su vez $\tau > 0$ es un tiempo de relajamiento en el cual los conductores tratan de ajustar su velocidad. La ecuación (18) también se puede escribir en la forma:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{1}{\tau} [V_e(\rho) - V] \quad (19)$$

La cual tiene similitud con la ecuación de Navier-Stokes en la dinámica de flujo compresible. En la ecuación (19) la cantidad $\mathcal{P}(x, t)$ se conoce con el nombre de “presión de tráfico”, por su semejanza con el tensor de presiones. Además el modelo K propone que la presión de tráfico se escriba en la forma:

$$\mathcal{P}(x, t) = \rho(x, t) \Theta_0 - \eta \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \quad (20)$$

Donde Θ_0 es la varianza, que en éste caso se propone como $\Theta(x, t)_0 = \Theta_0 = c_0^2 = \text{constante} > 0$. Si reescribimos las ecuaciones (19) y (20), podemos ver que la ecuación para la velocidad promedio es:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\Theta_0}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\eta_0}{\rho} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} [V_e(\rho) - V] \quad (21)$$

En la cual de igual manera se puede apreciar su similitud con la ecuación de Navier-Stokes.

Debemos recordar que además debemos tomar en cuenta la ecuación (5) para la densidad, de manera que las ecuaciones (19) y (21) están acopladas y no son lineales. Evidentemente la solución será numérica. En la solución se puede observar que la densidad y velocidad están muy relacionadas, ya que a una densidad alta corresponde una velocidad baja, mientras que, por el contrario, a una densidad baja corresponde una velocidad alta

Además al transcurrir el tiempo, el perfil de densidad adquiere un máximo pronunciado. Es conocido que este modelo presenta algunas dificultades para ciertos valores de los parámetros, resultando densidades mayores que la máxima y velocidades negativas.

3.5. Modelos de orden superior

Los modelos de orden superior al segundo los llamamos modelos de orden superior, el modelo de Helbing (H) que describiremos en esta sección pertenece a dicho conjunto debido a que considera tres variables relevantes en la descripción. El modelo H, se propuso para superar las dificultades mencionadas antes para el modelo K. Entonces se tomó en cuenta a la varianza como variable relevante y se propuso una ecuación dinámica para determinar su comportamiento. Evidentemente, dicha propuesta necesita de parámetros adicionales y datos obtenidos a partir del comportamiento empírico.

El modelo H contiene a las variables (ρ, V, Θ) y, por lo tanto se tienen tres ecuaciones acopladas no lineales para ellas. Además de una ecuación para la varianza, el modelo H contiene en sus parámetros, al tamaño de los vehículos, y un tiempo relacionado con el avance del conductor.

Las ecuaciones correspondientes a éste modelos son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{1}{\tau} [V_e(\rho) - V], \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + V \frac{\partial \Theta}{\partial x} = -\frac{2\mathcal{P}}{\rho} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} + \frac{2}{\tau} [\Theta_e(\rho, V) - \Theta]. \quad (24)$$

Se puede apreciar que estas ecuaciones tienen la estructura de la dinámica de fluidos, donde además de las ecuaciones de la densidad y la velocidad se considera la temperatura. Es importante notar que a pesar de la analogía, la presencia de términos análogos no significa que se tenga el mismo significado. Al igual que antes \mathcal{P} denota a la presión de tráfico y \mathcal{J} corresponde al equivalente del flujo de calor y es una medida de la asimetría en la estructura de la función de distribución de velocidades.

Para el modelo H se tienen las expresiones siguientes:

$$\mathcal{P} = \frac{\rho \Theta}{1 - \rho s(V)} - \eta \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (25)$$

$$\mathcal{J} = -\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad (26)$$

Donde:

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 - \rho s},$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 - \rho s}$$

Que corresponden a los coeficientes que intervienen en la presión de tráfico y en J . Las cantidades η_0, λ_0 son constantes y $s(V) = l + V\Delta T$ es una corrección que toma en cuenta el tamaño de los vehículos, l es su longitud y ΔT es un tiempo relacionado con el avance del conductor. Por otra parte, para la varianza que corresponde al estado homogéneo y estacionario, $\Theta_e(\rho, V)$.

3.6. Aproximación numérica

Se estudia la aproximación numérica de los modelos de primer orden para tráfico vehicular. Se presenta la aproximación numérica de la ecuación de advección por medio de esquemas de diferencias finitas y se analiza el error de truncamiento que se introduce al discretizar las ecuaciones.

A continuación se presenta cómo modificar estos esquemas para aproximar ecuaciones conservativas y se aplican a un problema de tráfico vehicular cuando se usan distintos modelos de primer orden.

3.6.1. Solución numérica de la ecuación de advección

Considérese el siguiente problema lineal de advección con condiciones iniciales:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (27)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty$$

Esta es la ecuación hiperbólica de primer orden más sencilla que se puede tener; sin embargo, su aproximación numérica presenta varias dificultades que a continuación se analizan. Los métodos que se usarán son métodos de diferencias finitas que consisten en aproximar las derivadas parciales de primer orden por medio de cocientes. El primer paso para aplicar estos métodos es acotar la región donde se va aproximar la solución. Supóngase que se selecciona un intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$, después de analizar la ecuación y de decidir que lo que pasa con la solución en la región que se está despreciando no cambia mucho el comportamiento global de ésta. Al acotar la región se debe

imponer una condición de frontera acorde con el problema a resolver que pueden ser tipo Dirichlet como $u(a, t) = \alpha$ o condiciones de frontera periódicas $u(a, t) = u(b, t)$.

El segundo paso es discretizar las variables temporales y espaciales. Dado $T > 0$, sean N y M dos números naturales y sean $\Delta t = \frac{T}{M}$ y $h = \frac{(b-a)}{N}$. Asociados a estas cantidades definimos los siguientes puntos: $t_j = j\Delta t$ para $j = 0, 1, \dots, M$ y $x_0 = a$, $x_i = a + ih$ con $i = 1, \dots, N$. Si u es solución del problema anterior entonces para cada (x_i, t_j) , u satisface:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} = 0 \quad (28)$$

La aproximación numérica del problema anterior en una región acotada, consiste en determinar $U_i^j \approx u(x_i, t_j)$ para $i = 0, 1, \dots, N$ y $j = 1, \dots, M$. Los esquemas de diferencias utilizan la serie de Taylor para aproximar las derivadas parciales; la precisión del esquema depende del número de términos de la serie que se usen. Los más sencillos son los explícitos que se obtienen al discretizar la derivada parcial respecto al tiempo por el siguiente cociente:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} \quad (29)$$

La forma en la que se discretice el término espacial dará lugar a distintos métodos explícitos. El más sencillo es el siguiente esquema:

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} = \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \quad (30)$$

Denotamos por $\vec{U}^j = (U_1^j, \dots, U_N^j)$, en el caso de imponer condiciones de tipo Dirichlet en x_0 el sistema a resolver para cada $j = 1, \dots, M$ es el siguiente con $(\vec{U}^0)_i = \varphi(x_i)$:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{c\Delta t}{h} [U_i^j - U_{i-1}^j], i = 1, \dots, N \quad (31)$$

Al discretizar las derivadas se introduce un error (error de truncamiento), que se puede estimar a través de la Serie de Taylor. Ilustremos la forma en que se calcula aplicándolo al esquema anterior. Sea u la solución exacta del problema en una región acotada y asumamos que sus derivadas parciales de segundo orden son continuas entonces

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \Delta t \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} + \dots \quad (32)$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - h \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \dots \quad (33)$$

Al substituir u y usar el hecho que es solución de la ecuación se obtiene:

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t} + c \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} + \frac{ch}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} + \dots \quad (34)$$

Entonces se define como error de truncamiento en el punto (x_i, t_j) y que se denotará por $E_T^{i,j}$ a todo el lado derecho de la anterior expresión. Dado que las derivadas parciales de segundo orden de u están acotadas, el valor absoluto del error de truncamiento del esquema numérico es aproximadamente:

$$|E_T^{i,j}| \leq Ch + D\Delta t \quad (35)$$

Definición: Se dice que un método de diferencias finitas es de orden p si existen constantes C y D mayores que cero que satisfacen que el error de truncamiento para cualquier punto (x_i, t_j) de la discretización

$$|E_T^{i,j}| \leq C(\Delta t)^r + Dh^q \text{ con } p = \min(r, q) \quad (36)$$

Definición: Se dice que un método de diferencias finitas es consistente si, para cualquier discretización, el valor absoluto del error de truncamiento $|E_T^{i,j}|$ tiende a cero cuando Δt y h tienden a cero.

3.6.2. Método de diferencias finitas.

El método de diferencias finitas es un método numérico de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales definidas en dominios finitos. Es de una gran sencillez conceptual y constituye un procedimiento muy adecuado para la resolución de una ecuación bidimensional como la ecuación (27). A continuación se definen diferentes esquemas de aplicación del método de diferencias finitas:

Euler hacia adelante

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{c\Delta t}{2h} [U_{i+1}^j - U_{i-1}^j], \quad |E_T^{i,j}| \leq C(\Delta t) + Dh^2 \quad (37)$$

Lax-Friedrichs

$$U_i^{j+1} = \frac{1}{2} [U_{i+1}^j - U_{i-1}^j] - \frac{c\Delta t}{2h} [U_{i+1}^j - U_{i-1}^j], \quad |E_T^{i,j}| \leq C(\Delta t) + Dh^2 \quad (38)$$

Upwind

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \begin{cases} \frac{c\Delta t}{h} [U_i^j - U_{i-1}^j] & c > 0 \\ \frac{c\Delta t}{h} [U_{i+1}^j - U_i^j] & c < 0 \end{cases}, \quad |E_T^{i,j}| \leq C(\Delta t)^2 + Dh^2 \quad (39)$$

Leap-Frog

$$U_i^{j+1} = U_i^{j-1} - \frac{c\Delta t}{2h} [U_{i+1}^j - U_{i-1}^j], \quad |E_T^{i,j}| \leq C(\Delta t)^2 + Dh^2 \quad (40)$$

Lax-Wendroff

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{c\Delta t}{2h} [U_{i+1}^j - U_{i-1}^j] + \frac{c^2(\Delta t)^2}{2h^2} [U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j], \quad |E_T^{i,j}| \leq C(\Delta t)^2 + Dh^2 \quad (41)$$

3.7. Modelos Locales

En teoría de grafos, una red de flujo o una red de transporte es un grafo dirigido donde cada arista tiene asociada una capacidad máxima que no puede ser excedida, y cada nodo tiene flujos de entrada (positivos) y flujos de salida (negativos). En todo momento se debe satisfacer la restricción que la cantidad de flujo que entra en un nodo debe ser la misma que sale de éste, las únicas excepciones son los nodos de origen, los cuales pueden tener más flujo de salida, y los nodos de destino los cuales pueden tener más flujo de entrada.

En la literatura las redes de flujo se utilizan principalmente para modelar el flujo de tránsito en un sistema de carreteras, redes de comunicación, fluidos en tuberías, corrientes eléctricas en circuitos eléctricos, entre otros.

Se puede describir matemáticamente a una red de flujo de la siguiente manera:

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido en el cual cada arista $(u, v) \in E$ tiene una capacidad no-negativa $c(u, v) \geq 0$; y sea s el nodo de origen y t el nodo de destino.

El flujo en G es la función $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, con las siguientes propiedades para todos los nodos u y v :

Restricción de capacidad: $f(u, v) \leq c(u, v)$

Simetría: $f(u, v) = -f(v, u)$

Conservación de flujo: $\sum_{w \in V - \{s, t\}} f(u, w) = 0$

Otro concepto importante es la capacidad residual, definida como la capacidad de flujo adicional para una arista una vez que una determinada cantidad de flujo ya está siendo transportada a través

de ésta: $c_f = c(u, v) - f(u, v)$. A partir de éste concepto se da la definición de red residual, denotada como $G_f(V, E_f)$, que representa la cantidad de capacidad de flujo disponible en la red.

Un camino aumentado es un camino (u_1, u_2, \dots, u_k) en la red residual, donde $u_1 = s$, $u_k = t$ y $c_f(u_i, u_{i+1}) > 0$. Se dice que una red ha alcanzado su máxima capacidad de flujo una vez que ya no sea posible obtener caminos aumentados en la red residual G_f .

Para construir la red residual G_f del grafo G se sigue el siguiente procedimiento:

Pseudocódigo.

Nodos de $G_f = V$

Aristas de $G_f = E_f$, donde E_f se define como:

PARA TODA arista $(x, y) \in E$

Si $f(x, y) < c(x, y)$ entonces $(x, y) \in E_f, c_f = c(x, y) - f(x, y)$

Si $f(x, y) > 0$ entonces $(y, x) \in E_f, c_f = f(x, y)$

3.7.1. Flujo máximo

El problema consiste en determinar la máxima capacidad de flujo que puede ser transportado a través de la red a partir del nodo origen y salir por el nodo de destino sin violar ninguna restricción de capacidad. El procedimiento para conocer el flujo máximo de una red, consiste en seleccionar repetidas veces cualquier trayectoria del nodo origen al nodo destino y asignar el flujo máximo posible en esa trayectoria.

En la literatura podemos encontrar algunos algoritmos que calculan el flujo máximo de una red, como son los algoritmos de Ford-Fulkerson, Edmonds-Karp y Goldberg-Tarjan.

3.7.2. Algoritmo Ford-Fulkerson

Éste algoritmo fue diseñado por L. R. Ford, Jr. y D. R. Fulkerson en el año 1956 para calcular el flujo máximo en una red de transporte, éste algoritmo tiene una complejidad $O(VEc_{max})$.

La idea principal del algoritmo consiste en mientras exista un camino del nodo de origen al nodo de destino, con capacidad en todas las aristas de ese camino, mandar flujo a través de él. Después volver a buscar otro camino con las mismas características y volver a mandar la mayor cantidad de flujo posible a través de él. Así sucesivamente hasta que ya no exista algún otro camino posible. Un camino que cuenta con capacidad para transportar flujo se denomina camino aumentado.

Pseudocódigo.

PARA TODA arista (u,v) : $f(u,v) \leftarrow 0$

MIENTRAS exista un camino p del nodo origen s al nodo destino t en G_f , tal que $c_f(u,v) > 0$ PARA TODAS las aristas $(u,v) \in p$

 Encontrar $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$

 PARA TODA arista $(u,v) \in p$

$f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(p)$ i.e., enviar flujo a través del camino

$f(v,u) \leftarrow f(v,u) - c_f(p)$ i.e., el flujo que podrá regresar después

3.7.3. Algoritmo Edmonds-Karp

Éste algoritmo es una implementación del algoritmo Ford-Fulkerson para cálculo del flujo máximo en redes con complejidad $O(VE^2)$. El algoritmo fue publicado por primera vez por el científico soviético Yefim Dinic en 1970, e independientemente por Jack Edmonds y Richard Karp en 1972.

El algoritmo es idéntico al algoritmo de Ford-Fulkerson, excepto porque se tiene un orden definido para buscar los caminos aumentados. El camino encontrado debe ser el camino más corto con capacidad disponible, esto se puede encontrar mediante una búsqueda en anchura (Breadth-first search, BFS).

Pseudocódigo.

PARA TODA arista (u,v) : $f(u,v) \leftarrow 0$

Hacer búsqueda en anchura (BFS) para encontrar un camino p del nodo origen s al nodo destino t en G_f , tal que $c_f(u,v) > 0$

PARA TODAS las aristas $(u,v) \in p$

 Encontrar $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \in p\}$

 PARA TODA arista $(u,v) \in p$

$f(u,v) \leftarrow f(u,v) + c_f(p)$ i.e., enviar flujo a través del camino

$f(v,u) \leftarrow f(v,u) - c_f(p)$ i.e., el flujo que podrá regresar después

3.8. Optimización

En matemáticas, ciencias de la computación, ciencias administrativas, etc., la optimización matemática (o programación matemática), es la elección del mejor elemento de un conjunto de elementos disponibles con respecto a algún criterio.

En el caso más simple, un problema de optimización consiste en maximizar o minimizar una función de variables reales eligiendo sistemáticamente valores de entrada (tomados de un conjunto permitido) y calculando el valor de la función. La generalización de las técnicas y métodos de optimización forman parte de un área grande de las matemáticas aplicadas. De forma general, la optimización incluye el descubrimiento de los «mejores valores» de alguna función objetivo dado un dominio definido, incluyendo una variedad de diferentes tipos de funciones objetivo y diferentes tipos de dominios.

Antes de describir la teoría concerniente a los métodos de optimización es necesario conocer la herramienta matemática que éstos usan, los conceptos fundamentales en los cuales sustentan su funcionamiento, así como los principales operadores de los que hacen uso.

3.8.1. Conceptos matemáticos

En ésta sección describimos brevemente algunas de las principales herramientas matemáticas que emplean los métodos de optimización matemática para la búsqueda de los valores máximos y/o mínimos de las funciones objetivo.

3.8.1.1. Conjunto de nivel

Un conjunto de nivel es el conjunto de curvas que conectan los puntos en los que una función de varias variables tiene un mismo valor constante. Esas curvas son útiles para la representación de más de dos dimensiones (o cantidades) en gráficos bidimensionales.

Un conjunto de nivel se define matemáticamente como un conjunto H y $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar sobre H . El conjunto de nivel C_k para la función f es el subconjunto de puntos x en H para los cuales $f(x) = k$, es decir, $C_k = \{x \in H | f(x) = k\}$. Dada su definición es posible que un conjunto de nivel pueda coincidir con el conjunto vacío.

Si $H = \mathbb{R}^2$ los conjuntos de nivel son curvas y se les llama curvas de nivel, curvas de contorno o isolíneas. En la figura 1 se muestra un ejemplo de las isolíneas de una función.

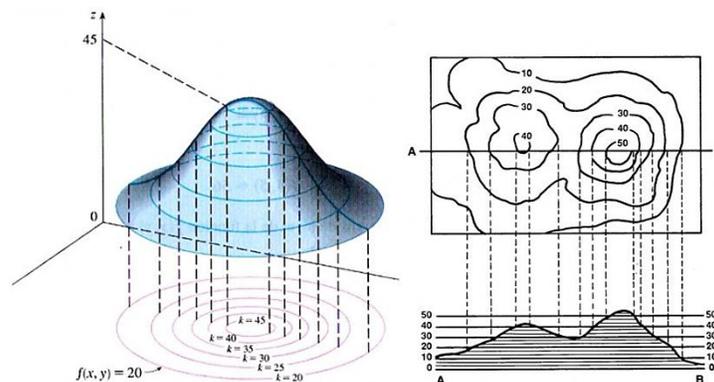


Figura 1. Ejemplo de curvas de nivel para una función.

Si $H = \mathbb{R}^3$ los conjuntos de nivel son superficies y se les llama isosuperficies o superficies de nivel. En la figura 2 se muestra un ejemplo de las isosuperficies de una función.

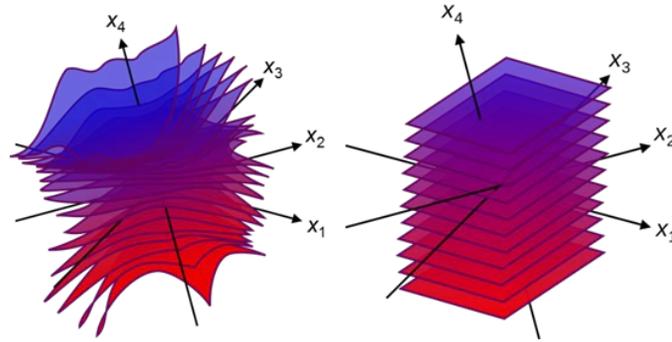


Figura 2. Ejemplo de isosuperficies o superficies de nivel.

Para dimensiones mayores, no se cuenta con una representación gráfica de estos conjuntos y las superficies obtenidas se conocen como hipersuperficies de nivel.

Si el conjunto H coincide con \mathbb{R}^n y el campo escalar f es de clase C_1 , entonces, los vectores gradiente del campo escalar son ortogonales a los conjuntos de nivel de la siguiente manera: Sea C_k un conjunto de nivel y $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow C_k$ una curva diferenciable. Los vectores gradiente del campo f sobre la curva, son ortogonales a los vectores velocidad de la curva. En efecto, para todo t en I se cumple que:

$$f(c(t)) = k \quad (42)$$

Derivando respecto de t se obtiene:

$$\nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = 0 \quad (43)$$

Como se observa en la figura 3, las curvas integrales asociadas al campo vectorial generado por el gradiente de f son ortogonales a los conjuntos de nivel asociadas a dicha función. En física, estas curvas integrales se las suele llamar líneas de campo o líneas de fuerza, según el contexto.

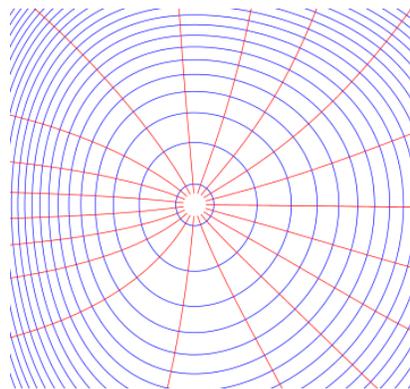


Figura 3. Curvas integrales paralelas a las curvas de nivel de la función.

Si la función f es diferenciable, el gradiente de f en un punto X_0 es cero, o perpendicular al conjunto de nivel de f en ese punto.

Cuando las isolíneas están muy cerca unas de otras, la longitud del gradiente es grande y la variación aumenta abruptamente. Si las isolíneas adyacentes tienen el mismo grosor de línea, la dirección del gradiente no puede determinarse y por ello se emplean diferentes grosores o se rotulan o etiquetan numéricamente, de este modo la dirección del gradiente puede ser fácilmente apreciada.

3.8.1.2. Gradiente

En cálculo vectorial, el gradiente ∇f de un campo escalar f es un campo vectorial. El vector gradiente de f evaluado en un punto genérico x del dominio de f , $\nabla f(x)$, indica la dirección en la cual el campo f varía más rápidamente y su módulo representa el ritmo de variación de f en la dirección de dicho vector gradiente.

El gradiente se define como el campo vectorial cuyas funciones coordenadas son las derivadas parciales del campo escalar, esto es:

$$\nabla \cdot f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (44)$$

De forma geométrica el gradiente es un vector normal (o perpendicular) a la curva de nivel en el punto que se está estudiando, llámese (x, y) , (x, y, z) , $(tiempo, temperatura)$, etcétera.

El gradiente tiene propiedades importantes que han sido aprovechadas en diferentes métodos de optimización numérica, entre los que destacan:

- Es ortogonal a las superficies equiescalares definidas por $\phi = cte$.
- Apunta en la dirección en que la derivada direccional es máxima.
- Su norma es igual a esta derivada direccional máxima.
- Se anula en los puntos estacionarios: máximos, mínimos y puntos de silla.

3.8.1.3. Matriz hessiana

La matriz hessiana es la matriz cuadrada de las segundas derivadas parciales de una función f de n variables. Ésta matriz describe la curvatura local de la función f .

Dada una función real f de n variables reales $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, si la todas las segundas derivadas de f existen y son continuas sobre el dominio de la función, se define la matriz hessiana de f como $H_f(x)$, donde:

$$H_f(x)_{i,j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (45)$$

O bien, en forma matricial como:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Una de las principales aplicaciones de la matriz hessiana es dentro de los métodos tipo Newton para optimización numérica de problemas a gran escala. Debido a que en la práctica es computacionalmente costoso calcular la matriz hessiana completa, muchos métodos cuasi-Newton (como el algoritmo BFGS [49]), han desarrollado aproximaciones de ésta.

3.8.2. Métodos de optimización

En términos simples podemos decir que la optimización consiste en intentar maximizar las características deseadas de un sistema; mientras que, al mismo tiempo, se busca minimizar las no deseadas. Dichas características y la forma en que se buscará mejorarlas dependerá de cada sistema.

De manera más formal podemos describir la optimización como el proceso que consiste en encontrar el valor que maximice o minimice una función $f(x)$, conocida como *función objetivo*, a partir de la elección sistemática de valores de entrada tomados de un conjunto permitido (Dominio). En la práctica, los sistemas más complejos tienen propiedades que dependen de más de una variable, se dice entonces que su función objetivo, $f(x_1, x_2, \dots, x_D)$, tiene D parámetros o variables que afectan a cada propiedad a optimizar.

En la literatura a las funciones objetivo cuyo valor se quiere minimizar se les denomina *funciones de costo*; para el caso especial en el cual se busca que la función objetivo a minimizar llegue a cero se le conoce como *función de error*. En contraste, cuando se busca maximizar la función objetivo a ésta se le designa con el nombre de *función de aptitud*.

A pesar de no existir una única manera de clasificar las funciones objetivo, es posible diferenciarlas por algunos de sus atributos a considerar para su optimización. Entre los principales atributos de las funciones objetivo podemos enlistar los siguientes:

- Cuantificación de parámetros. Éste aspecto refiere al hecho de saber si las variables de la función objetivo son continuas o discretas, o incluso si son elementos de un conjunto finito definido. También refiere al hecho de conocer si son del mismo tipo o no.
- Dependencia de parámetros. En éste ámbito es necesario responder a la pregunta de si se pueden optimizar de manera independiente cada una de las variables de la función objetivo (función separable), o los valores de algunas de ellas dependen de los valores de otras (función con variables dependientes).
- Dimensionalidad. Este atributo hace referencia a la cantidad de variables (D), por las cuales está definida la función objetivo. Otra interpretación que comúnmente se le da refiere a la cantidad de dimensiones en las cuales está definido el problema.
- Modalidad. Se dice que una función objetivo es unimodal si ésta tiene un único mínimo o máximo local; si por el contrario, la función objetivo tiene varios mínimos o máximos locales se dice que la función objetivo es multimodal. En ocasiones no es posible conocer *a priori* este dato.
- Dependencia del tiempo. Ésta característica hace referencia al hecho de conocer si el óptimo local encontrado permanece estacionario o es dinámico, es decir, si dicho óptimo cambia o permanece constante con el transcurso del tiempo.
- Restricciones. Por medio de ésta propiedad podemos decir si la función objetivo está sujeta o no a condiciones de igualdad y/o de desigualdad.
- Diferenciabilidad. Éste aspecto responde a las preguntas ¿Es diferenciable la función en todos los puntos de interés? ¿Es sólo una o dos veces diferenciable en los puntos de interés? Como se verá más adelante es deseable que esta propiedad se cumpla para poder aplicar algún método matemático de optimización.

Una vez conocidas o estudiadas las características del problema a optimizar, el siguiente paso es elegir el método de optimización que más se adecue a éste. En la tabla 2 se muestra una primera clasificación de los métodos de optimización con base en el número de puntos o vectores que usan para explorar el espacio de posibles soluciones del problema. Un segundo criterio que se utilizó para clasificar los métodos de optimización fue de acuerdo con si éstos hacen uso o no de métodos matemáticos que empleen el concepto de derivada para la búsqueda de máximos o mínimos.

Muchos de los algoritmos de optimización necesitan comenzar a partir de un punto factible. La factibilidad del problema consiste en encontrar dicho punto válido dentro del dominio del problema, sin prestar mayor importancia al valor obtenido al evaluarlo en la función objetivo. Éste puede ser considerado como el caso especial de la optimización donde el valor de la función objetivo es el mismo para toda solución y así cualquier solución es óptima.

	Punto único	Multipunto
Búsqueda basada en la derivada	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Descenso del gradiente, ▪ Gradiente conjugado, ▪ Métodos del tipo Cuasi-Newton 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Técnicas con inicio múltiple, ▪ Técnicas de agrupamiento
Búsqueda directa (sin uso de derivada)	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Camino aleatorio (Random Walk), ▪ Hooke-Jeeves 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Nelder-Mead, ▪ Algoritmos evolutivos, ▪ Algoritmos de evolución diferencial, ▪ Algoritmos genéticos, ▪ Heurísticas

Tabla 2. Una clasificación de los métodos de optimización y algunos de sus métodos más representativos.

Nota: En los métodos de optimización multipunto no se realizó una distinción entre los métodos que actúan sobre varios puntos de forma paralela y los métodos que lo hacen de forma secuencial.

Una vía para obtener tal punto es relajar las restricciones del problema usando una o varias variables de holgura; con suficiente holgura cualquier punto de partida llega a ser factible. De ésta forma, el siguiente paso consistirá en minimizar esas variables de holgura al punto de ser nulas (cero), o negativas.

Se denomina condiciones de primer orden o **condiciones necesarias de optimalidad** a la ecuación o al conjunto de ecuaciones indicando que las primeras derivadas son iguales a cero en un óptimo local. Para los métodos de optimización con base en la derivada, los puntos candidatos a solución de los problemas de optimización son encontrados en los puntos donde la primera derivada o el gradiente de la función objetivo es cero o está indefinido.

Mientras la prueba de la primera derivada identifica a los puntos que son candidatos a optimizar la función objetivo, no es posible distinguir si dicho punto es un mínimo, un máximo, o ninguno de los dos. Sólo si la función objetivo es dos veces diferenciable estos puntos pueden ser distinguidos estudiando su segunda derivada o su matriz de segundas derivadas (matriz hessiana).

Las condiciones que distinguen a los máximos, o mínimos, de otros puntos estacionarios son llamadas condiciones de segundo orden o **condiciones suficientes de optimalidad**. Si un punto que es candidato a solución satisface las condiciones de primer y segundo orden es suficiente para establecer, al menos, optimalidad local. Si la matrix hessiana es definida positiva en un punto entonces el punto es un mínimo local, si la matrix hessiana es definida negativa entonces el punto es un máximo local, finalmente, si la matrix hessiana es indefinida entonces el punto es algún tipo de punto de ensilladura.

3.8.2.1. Optimización por punto único con base en la derivada

Éste tipo de métodos de optimización matemática son clásicos en la literatura y fueron de los primeros en desarrollarse.

Usando una notación convencional, la serie de Taylor para una función objetivo arbitraria se describe como:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\nabla f(x_0)}{1!} (x - x_0) + (x - x_0)^T \frac{\nabla^2 f(x_0)}{2!} (x - x_0) + \dots \quad (47)$$

$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^T H(x_0)(x - x_0) + \dots \quad (48)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_D)$$

Donde x_0 es el punto de la función $f(x)$ que se está estudiando. Para que un punto sea el punto mínimo de la función es necesario que se cumpla que $\nabla f(x^*) = 0$, i.e., todas las derivadas parciales en $x = x^*$ deben de ser cero. Los términos de mayor grado en la expansión de la serie de Taylor en los vecinos cercanos a x_0 no realizan una gran aportación a ésta y pueden ser omitidos durante el cálculo.

Aplicando la regla de la cadena para la derivada en los primeros tres términos de la serie de Taylor en la ecuación (48) podemos reescribir el gradiente de un punto arbitrario x_0 como:

$$\nabla f(x^*) = \nabla f(x_0) + H(x_0)(x^* - x_0) = 0 \quad (49)$$

Y simplificando:

$$x^* = -\nabla f(x_0) \cdot H^{-1}(x_0) + x_0 \quad (50)$$

Si la función objetivo, $f(x)$, es cuadrática, entonces podemos aplicar la ecuación (50) directamente para obtener su mínimo. La figura 4 muestra como haciendo uso de la ecuación (50) se calcula el mínimo de una función cuadrática unimodal en el punto de inicio x_0 .

A pesar de existir aplicaciones donde la función objetivo es una función cuadrática sencilla, la mayoría de los problemas a optimizar carecen de ésta característica. Como se mencionó con anterioridad, los métodos de optimización con base en la derivada pueden ser efectivamente aplicados si la función objetivo cumple con los siguientes requisitos:

- La función objetivo debe ser dos veces diferenciable.
- La función objetivo debe ser unimodal, i.e., debe tener un solo mínimo.

La figura 5 muestra un ejemplo de una función diferenciable unimodal.

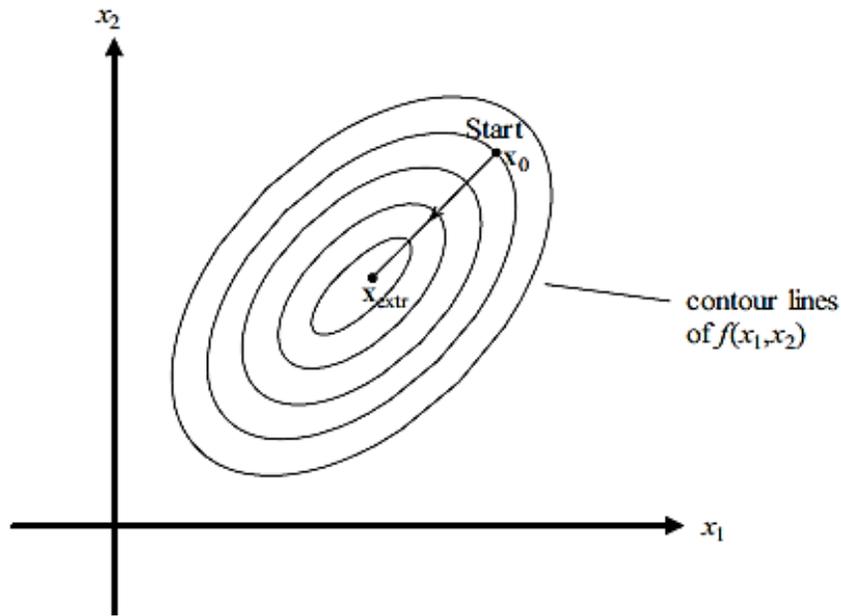


Figura 4. Búsqueda por punto único con base en la derivada. Si la función es cuadrática y diferenciable, entonces el aplicar la ecuación (50) permite obtener el mínimo de ella.

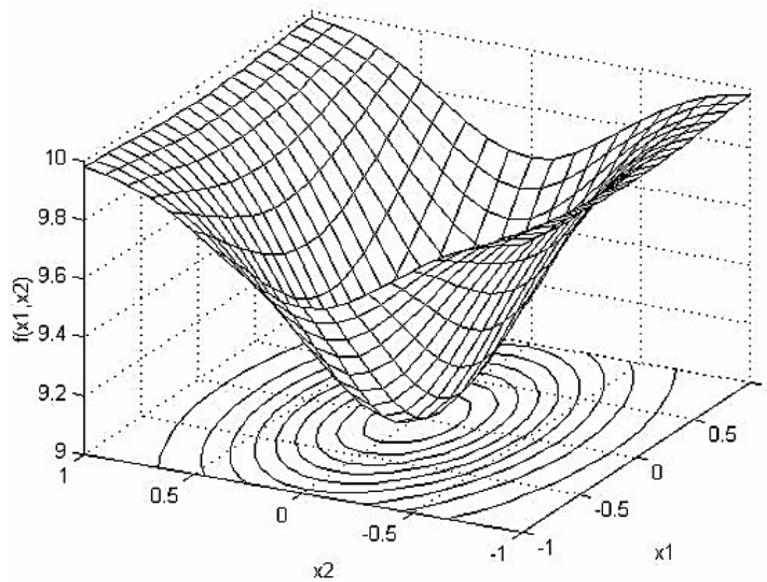


Figura 5. Ejemplo de una función unimodal dos veces diferenciable definida por la ecuación $f(x_1, x_2) = 10 - e^{-(x_1^2 + 3x_2^2)}$

El método del descenso del gradiente es una de las técnicas más simples que, como su nombre lo indica, utiliza el operador gradiente, pero a diferencia del método expuesto previamente, este método asume que $H^{-1}(x_0)$ puede ser remplazado por la matriz identidad \mathbb{I} , definida como:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Debido a la sustitución de la matriz hessiana por la matriz identidad, el método ya no converge directamente al mínimo sino al punto $x_1 = x_0 - \nabla f(x_0)$. Como se puede intuir, el punto x_1 se encontrará más cerca del mínimo de la función objetivo que el punto x_0 , esto a no ser que se haya elegido un tamaño de paso muy grande.

La relación $x_{n+1} = x_n - \gamma \cdot \nabla f(x_n)$ define la dirección del siguiente paso, donde γ es el tamaño de paso y proporciona una medida de control para evitar dar pasos demasiado grandes o demasiado pequeños.

En éste tipo de métodos se tiene el problema de elegir un tamaño de paso adecuado ya que no existe un tamaño óptimo, sino que, dicho tamaño depende de la función objetivo a optimizar. La figura 6 muestra un ejemplo de la secuencia de pasos que genera el método del descenso del gradiente para encontrar un mínimo a partir del punto x_0 .

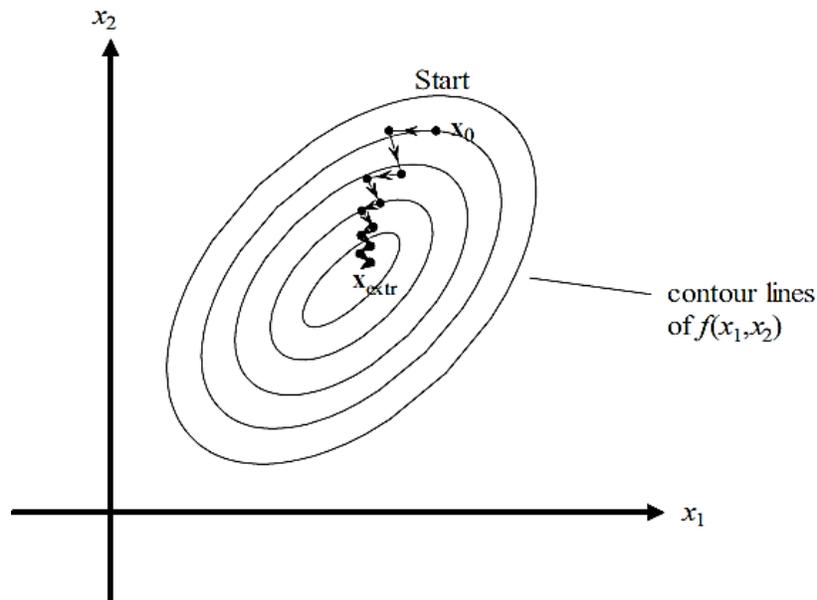


Figura 6. Búsqueda por punto único sustituyendo el uso de la matriz hessiana por la matriz identidad.

El hecho de sustituir la matriz hessiana por la matriz identidad introduce una serie de problemas que requieren de técnicas más elaboradas para disminuir los efectos negativos de dicha sustitución. Éstas técnicas pueden ser de tipo cuasi-Newton en los que se aproxima la matriz hessiana por algún esquema que requiera menos cálculos matriciales; o bien, métodos de tipo gradiente conjugado en los que se opta por usar optimizaciones lineales en direcciones conjugadas para evitar los cálculos de las segundas derivadas. Detalles adicionales de los métodos de optimización clásicos con base en la derivada se pueden encontrar en [7, 53, 55, 60].

3.8.2.2. Optimización local y global

Uno de los requisitos que solicitan los métodos clásicos de optimización con base en la derivada para poder ser aplicados es que la función objetivo sea unimodal, es decir, que tenga un solo mínimo o máximo. Cuando la función objetivo es multimodal, ésta puede tener varios mínimos, máximos y/o puntos de ensilladura. La figura 7 muestra un ejemplo de una función multimodal.

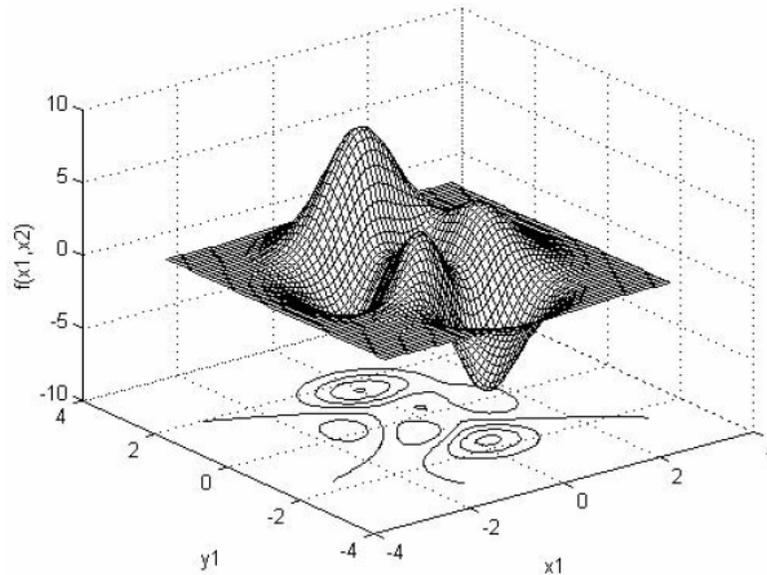


Figura 7. Muestra los diferentes «picos» y puntos de ensilladura de la función definida por la ecuación: $f(x_1, x_2) = 3(1 - x_1)^2 e^{x_1^2 + (x_2 + 1)^2} - 10\left(\frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5\right) e^{x_1^2 + x_2^2} - \frac{1}{3} e^{(x_1 + 1)^2 + x_2^2}$

Uno de los problemas que presentan las funciones multimodales a los métodos de optimización reside en el hecho de elegir un punto inicial adecuado. Éste problema es debido a la tendencia que tienen algunos métodos de optimización a ser atraídos, durante la búsqueda del mínimo o máximo global, hacia puntos mínimos o máximos locales cercanos al punto desde el cual se empezó la búsqueda.

Diversas técnicas de inicio múltiple han sido desarrolladas en respuesta al problema del punto inicial y, como su nombre lo indica, éstas técnicas realizan o reinician el proceso de optimización a partir de distintos puntos. La estrategia más empleada en éste tipo de métodos consiste en realizar una búsqueda local por punto único con base en la derivada con cada uno de los puntos de inicio definidos para posteriormente elegir el que optimizó más la función objetivo. Sin embargo, si no se tiene el conocimiento suficiente sobre la función objetivo es difícil saber con cuantos puntos de inicio diferentes sería suficiente realizar la búsqueda para encontrar el mínimo o máximo globales.

3.8.2.3. Optimización Multiobjetivo

El problema de la optimización multiobjetivo, también conocido como problema de optimización vectorial, se define como el problema de encontrar un vector de variables de decisión que satisface

ciertas restricciones y optimice simultáneamente un vector de funciones cuyos elementos representan las funciones objetivo, i.e., encontrar una solución cuyos valores sean aceptables para las funciones objetivo. Las funciones objetivo se designan como $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$, donde k es el número de funciones objetivo a resolver. Por lo tanto el vector de funciones $f(x)$ a ser optimizadas se define como:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{bmatrix}$$

O más convenientemente como:

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]^T$$

Las variables de decisión son cantidades numéricas cuyos valores se deben de elegir en el problema a optimizar. Generalmente esas cantidades se representan en un vector x de n variables de decisión.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

De igual modo se pueden escribir de la forma:

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ x_i^{(L)} &\leq x_i \leq x_i^{(U)} \\ x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Éste conjunto de restricciones son llamadas variables de límite, restringiendo a cada variable de decisión x_j a únicamente poder tomar valores entre los límites inferior $x_j^{(L)}$ y superior $x_j^{(U)}$. Esos límites constituyen el espacio de decisión \mathcal{D} de las variables.

Además, en éste tipo de problemas existen restricciones impuestas por las características particulares del entorno o de los recursos disponibles, se deben de satisfacer todas esas condiciones para poder considerar aceptable una solución. Todas esas restricciones se pueden expresar matemáticamente en forma de desigualdades:

$$c_1 \leq g_j(x) \leq c_2$$

$$j = 1, \dots, q$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

En igualdades:

$$h_k(x) = c$$

$$k = 1, \dots, p$$

$$c \in \mathbb{R}$$

El número de condiciones de igualdad p debe ser menor que el número de variables de decisión n , por lo tanto, el número de grados de libertad está dado por $n - p$.

3.8.2.4. Búsqueda Local

En muchas disciplinas existen problemas con múltiples objetivos, y su solución ha constituido un reto para los investigadores. La complejidad de esos problemas por sus grandes espacios de búsqueda, incertidumbre, ruido, entre otros factores, no permite que se utilicen técnicas tradicionales de solución como investigación de operaciones o álgebra lineal

Además en los problemas con múltiples funciones objetivo no existe una solución única, existe un número de soluciones y todas son óptimas. Dado que no se puede determinar una solución óptima única para múltiples objetivos en conflicto, el problema de la optimización multiobjetivo recae en encontrar un número de soluciones óptimas locales que compensen cada una de estas funciones.

Sin información adicional no se puede decidir si una solución del conjunto de soluciones óptimas locales es mejor que la otra. Por lo tanto, en la optimización multiobjetivo idealmente el esfuerzo debe de radicar en encontrar el conjunto de soluciones óptimas locales considerando todos los objetivos como importantes, después de que ese conjunto de soluciones óptimas locales se ha encontrado, un usuario con información adicional puede usar consideraciones cualitativas para tomar una decisión.

El proceso descrito anteriormente se ilustra en el diagrama de la figura 8. Los métodos de búsqueda clásicos usan aproximaciones punto-a-punto donde en cada iteración una solución se modifica a una diferente, preferentemente mejor, por lo tanto la ejecución de una sola simulación produce una sola solución óptima.

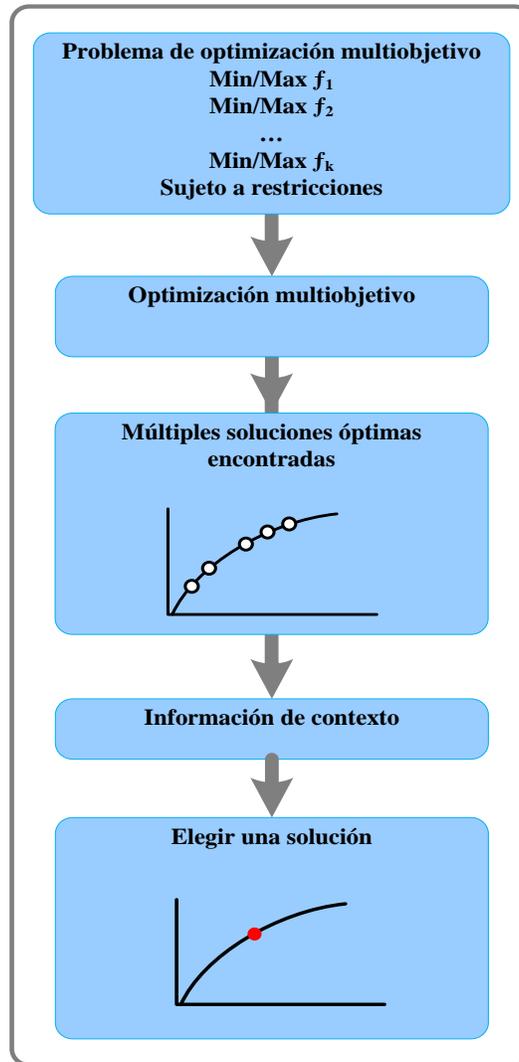


Figura 8. Diagrama general del proceso de optimización multiobjetivo.

Una de las principales diferencias entre los métodos de búsqueda clásicos y los algoritmos de optimización multiobjetivo es que éstos últimos usan un conjunto de soluciones en cada iteración, en lugar de usar una sola posible solución. Si un problema de optimización multiobjetivo tiene un solo óptimo, se espera que todos los elementos del conjunto de soluciones converjan a ése óptimo, de lo contrario, el conjunto de resultados contendrá múltiples soluciones óptimas locales, todas ellas obtenidas en una sola iteración.

Los algoritmos de optimización multiobjetivo requieren de una mayor capacidad de procesamiento, dado que, requieren una mayor cantidad de evaluaciones de las funciones objetivo. La necesidad de mayor velocidad de procesamiento es especialmente importante cuando se optimizan modelos basados en simulaciones. Lograr obtener una solución aceptable puede requerir de decenas de miles de evaluaciones de las funciones objetivo; por lo tanto, un enfoque paralelo eficiente es crucial para

esos problemas, dado que, un procesamiento serial podría tomar cientos de horas para optimizar modelos basados en simulaciones. La figura 9 propone un diagrama con los pasos básicos para la búsqueda en paralelo de soluciones a problemas optimización multiobjetivo.

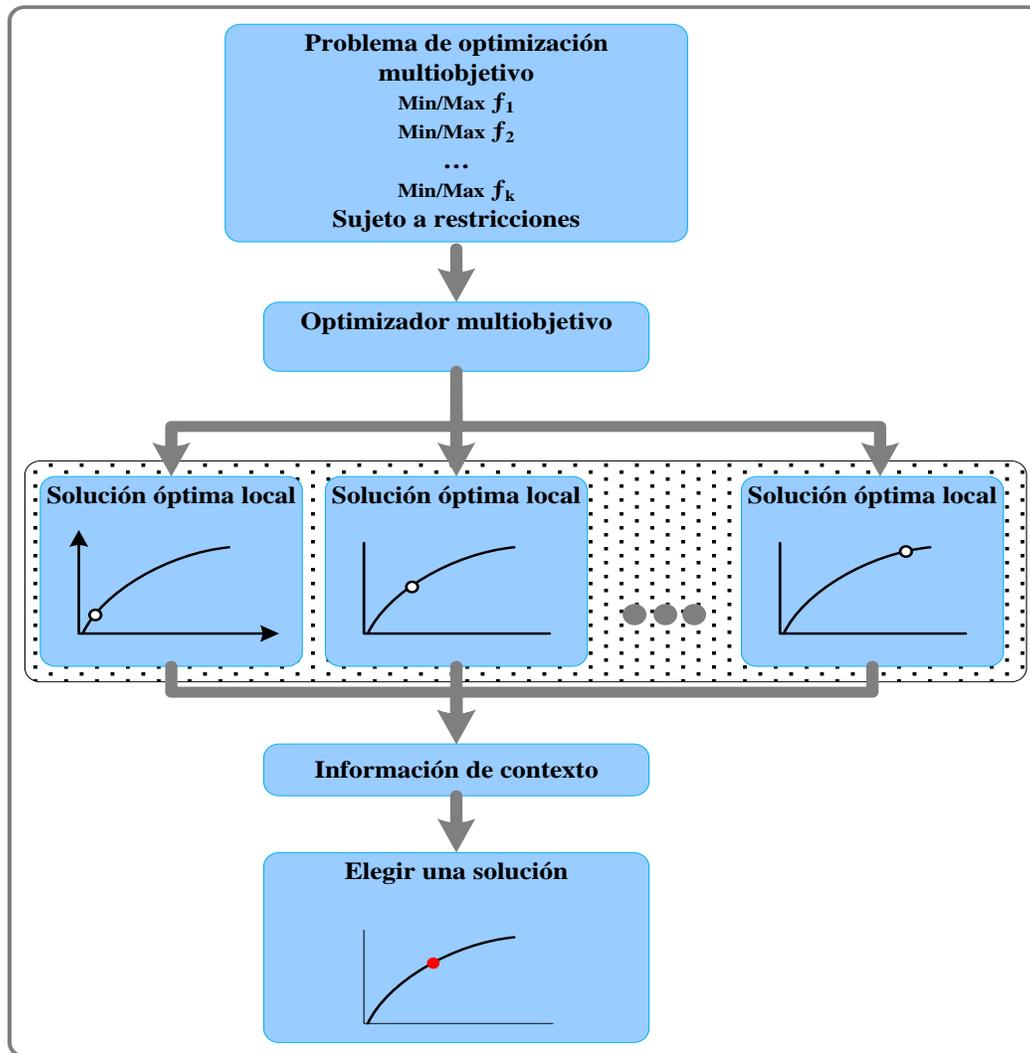


Figura 9. Diagrama del proceso de optimización multiobjetivo con un enfoque paralelo.

3.9. Cómputo en paralelo

Es una alternativa tecnológica que consiste en el uso de plataformas de múltiples procesadores o de procesadores de varios núcleos (multinúcleo). Esta forma de cómputo opera sobre el principio de que los problemas grandes, a menudo, se pueden dividir en problemas más pequeños o subproblemas para luego ser resueltos simultáneamente. En la figura 10 se observa un esquema general de los procesamientos en serie y en paralelo.

La computación distribuida se encuentra dentro de esta definición, ya que es un modelo que permite resolver problemas grandes utilizando un gran número de computadoras organizadas en clústeres que se encuentran separadas físicamente, pero comunicadas entre sí mediante una red de comunicaciones. Cada máquina posee sus componentes de hardware y software que el programador percibe como un solo sistema. El programador accede a los componentes de software remotos de la misma manera en que accedería a componentes locales, de esta forma cada equipo puede realizar cálculos independientes sobre diferentes datos o incluso sobre los mismos obteniendo de cada uno de ellos un resultado para finalmente concentrarlos en un solo lugar.

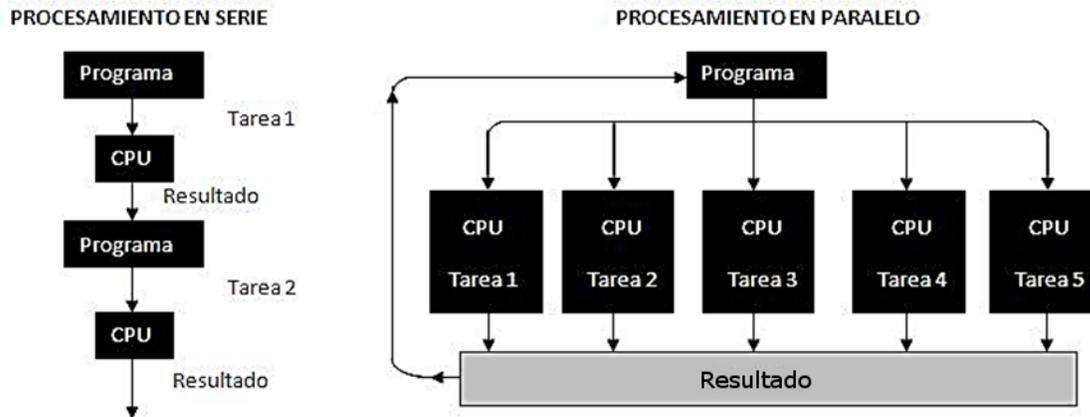


Figura 10. Esquema comparativo entre el cómputo en serie y el cómputo en paralelo.

Para paralelizar una aplicación es necesario contar con las herramientas necesarias para generar programas que realicen cómputo en paralelo. Dependiendo de la herramienta con que se trabaje será la forma en que se paralelizará la solución del problema para ser resuelto en varios procesadores. En éste aspecto se ha optado por hacer uso de la herramienta *MPI*.

3.9.1. MPI

La Interfaz de Paso de Mensajes o MPI por sus siglas en inglés (Message Passing Interface). Es una interfaz para la realización de aplicaciones para cómputo en paralelo con base en el paso de mensajes y es el estándar para la comunicación entre los nodos que ejecutan un programa en un sistema de memoria distribuida.

El modelo de programación subyacente tras MPI es «Múltiples Instrucciones, Múltiples Datos» (del inglés Multiple Instruction, Multiple Data, MIMD); siendo un caso especial aquel en el que todos los procesos ejecutan el mismo programa, aunque no necesariamente la misma instrucción al mismo tiempo.

El paso de mensajes es una técnica empleada en programación paralela para aportar sincronización entre procesos y permitir la exclusión mutua. Los elementos principales que intervienen en el paso de mensajes son el proceso que envía, el proceso que recibe y el mensaje. Dependiendo de si el proceso que envía el mensaje espera a que el mensaje sea recibido, se puede hablar de paso de

mensajes síncrono o asíncrono. En el paso de mensajes asíncrono, el proceso que envía, no espera a que el mensaje sea recibido, y continúa su ejecución, siendo posible que vuelva a generar un nuevo mensaje y a enviarlo antes de que se haya recibido el anterior; mientras que en el paso de mensajes síncrono, el proceso que envía el mensaje espera a que un proceso lo reciba para continuar su ejecución.

Las implementaciones en MPI consisten en un conjunto de bibliotecas de rutinas que pueden ser utilizadas en programas escritos en los lenguajes de programación C, C++ y Fortran. La ventaja de MPI sobre otras bibliotecas de paso de mensajes, es que los programas que utilizan la biblioteca son portables (dado que MPI ha sido implementado para casi toda arquitectura de memoria distribuida), y rápidos, (porque cada implementación de la biblioteca ha sido optimizada para el hardware en la cual se ejecuta).

3.9.2. ROOT

ROOT [10] es un framework para el desarrollo de aplicaciones de análisis de datos científicos a gran escala desarrollado por el CERN (sigla del francés *Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire* y cuyo nombre oficial en español es *Organización Europea para la Investigación Nuclear*).

ROOT está implementado en el lenguaje C++ por lo cual es orientado a objetos y ha estado en constante desarrollo desde el año 1994. Proporciona una plataforma de acceso independiente al subsistema de gráficos y al sistema operativo de una computadora, proveyendo un constructor de interfaz gráfica de usuario, contenedores de clases, reflexión¹, un intérprete de scripts y línea de comandos para C ++ (CINT), serialización de objetos y persistencia.

Entre las herramientas provistas por ROOT encontramos aquellas para la generación, visualización y análisis de histogramas (ver figura 11), funciones y distribuciones; ajuste de curvas y minimización de funciones, álgebra lineal y matricial, análisis multivariable, redes neuronales, generadores de eventos Monte Carlo, acceso a bases de datos, herramientas para desarrollo en cómputo paralelo, visualizaciones geométricas en 3D, manipulación y generación de imágenes en formatos como PDF, PostScript, PNG, JPEG, SVG, LaTeX, entre otros.

En éste trabajo se utilizaron principalmente las herramientas de ajuste de curvas (*fitting*) y de generación, visualización y análisis de histogramas, funciones y distribuciones.

¹ La reflexión computacional refiere a la capacidad que tiene un programa para observar y opcionalmente modificar su estructura en tiempo de ejecución.

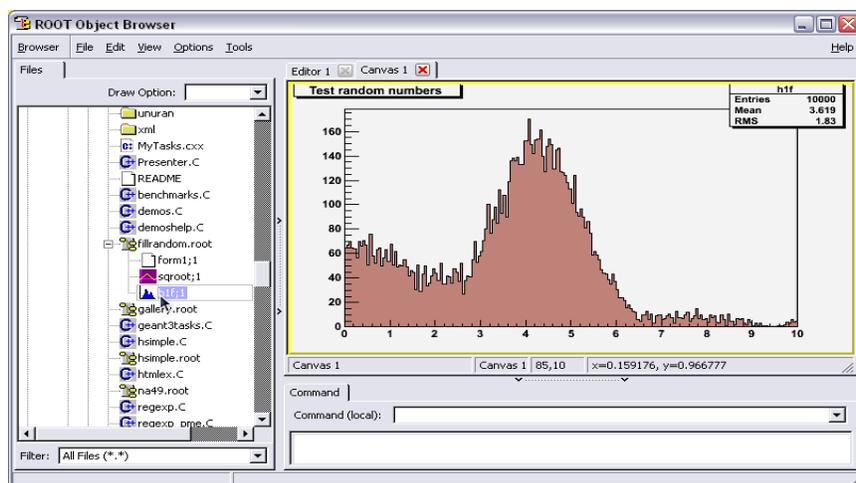


Figura 11. Captura de pantalla de un histograma desarrollado haciendo uso del framework ROOT.

3.10. Ajuste de curvas

El ajuste de curvas o *fitting*, es un proceso matemático que consiste en construir una función matemática con parámetros definidos que se ajuste de la mejor manera posible a una serie de datos que posiblemente se encuentren sujetos a variables estadísticas. Éste proceso puede involucrar el proceso de interpolación para obtener un ajuste exacto de la función a los datos, o bien, el proceso de suavizado para un ajuste aproximado de la función construida a los datos.

Las curvas obtenidas del ajuste se pueden usar como complemento visual de información, para inferir posibles valores de una función en regiones donde no hay datos disponibles, o bien, para resumir las relaciones entre dos o más variables.

El proceso de suavizar un conjunto de datos consiste en crear una función de aproximación que trate de obtener los patrones más importantes de la información, mientras que, al mismo tiempo, se descarta ruido y otros fenómenos. Sin embargo, el proceso de suavizado se puede distinguir del concepto de ajuste de curvas en los siguientes puntos:

- El ajuste de curvas a menudo implica el uso explícito de una función de forma para el resultado, mientras que los resultados inmediatos del proceso de suavizado son las variables “suavizadas” sin necesidad de usar una función de forma, si es que existe una.
- El objetivo principal del suavizado es dar una idea general de los cambios de valor prestando poca atención en lograr una estrecha correspondencia entre los valores de la función con los datos; mientras que el ajuste de curvas se enfoca en lograr una correspondencia lo más cercana posible entre estos.
- Los métodos de suavizado generalmente tienen asociados un parámetro de ajuste que permite controlar el grado de suavizado. El ajuste de curvas permite ajustar cualquier número de parámetros de la función necesarios para lograr el mejor ajuste.

El suavizado tiene dos importantes aplicaciones en el campo del análisis de datos, la primera es que permite obtener más información de los datos bajo la consideración que el suavizado es razonablemente bueno y, la segunda, es permitir análisis flexibles y robustos. Tradicionalmente el suavizado de datos es realizado usando el estimador de densidad más simple: *el histograma*.

3.10.1. Histograma

Un histograma es una representación gráfica que permite observar y evaluar, de manera aproximada, la distribución de probabilidad que tiene asociada una serie de datos pertenecientes a la medición repetida de la variable de un fenómeno. Ésta representación fue propuesta en 1895 por el científico inglés Karl Pearson.

Consiste en la representación gráfica de una variable en forma de frecuencias tabuladas que se muestran como barras sobre intervalos discretos llamados *bins*. El área de cada barra es proporcional a la frecuencia de las observaciones en dicho intervalo, ya sea en forma diferencial o acumulada; mientras que, la altura de las barras es igual a la densidad de la frecuencia del intervalo, es decir, la frecuencia de observaciones por intervalo dividida entre la anchura de éste.

El área total de un histograma debe ser igual a la cantidad de datos que éste contiene, pudiéndose también normalizar para mostrar frecuencias relativas y, de ésta forma, tener un área igual a 1 y mostrar el porcentaje de ocurrencias en cada categoría. Las categorías son definidas como intervalos consecutivos de una variable que no se traslapan, los cuales deben de ser adyacentes, y generalmente se busca que sean de la misma anchura. Las barras del histograma se dibujan juntas para indicar que se trata de una variable cuantitativa continua, (ver figura 12); o bien, de forma separada para indicar que se trata de una variable cuantitativa discreta (ver figura 13), en cuyo caso es común llamarlo *diagrama de frecuencias*.

Los histogramas sirven para obtener una vista general de la distribución de la población, o la muestra, respecto a una característica, cuantitativa y continua. De esta manera, ofrecen una visión en grupo permitiendo observar comportamientos, grado de homogeneidad, o tendencia por parte de la muestra o población por ubicarse hacia una determinada región de valores dentro del espectro de valores posibles que pueda adquirir la característica; o, en contraposición, poder observar el grado de variabilidad, y por ende, la dispersión de todos los valores que toman las partes. También es posible no evidenciar ninguna tendencia y obtener que cada miembro de la población adquiere un valor de la característica aleatoriamente sin mostrar ninguna preferencia o tendencia, entre otras cosas.

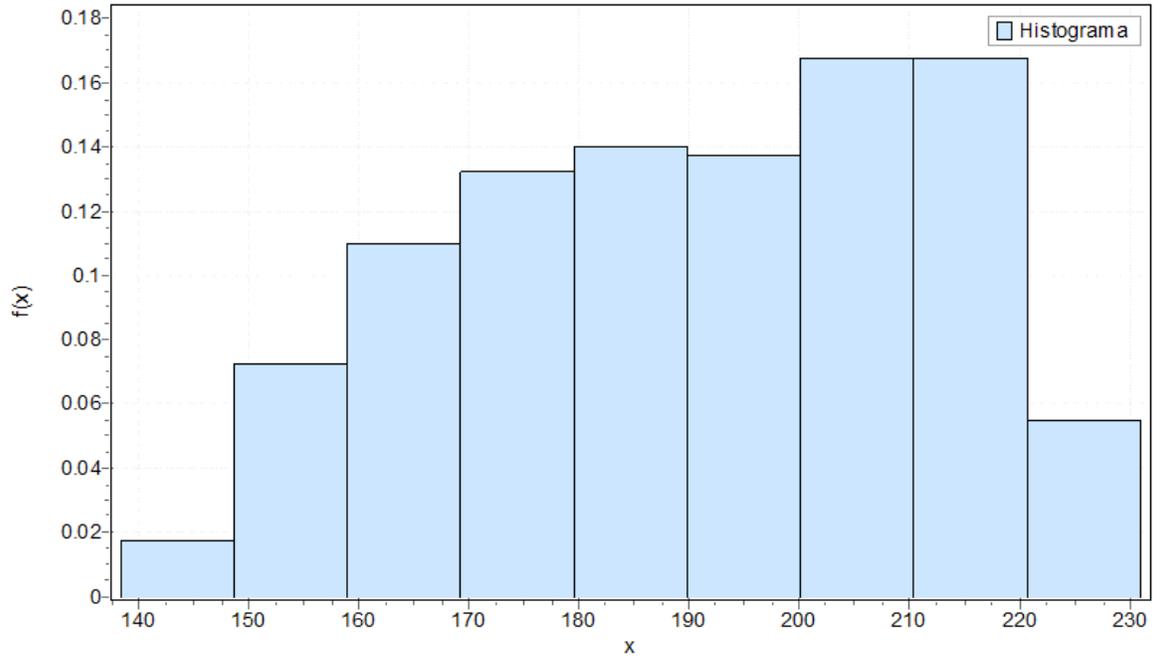


Figura 12. Ejemplo de un histograma para una función de densidad de probabilidad.

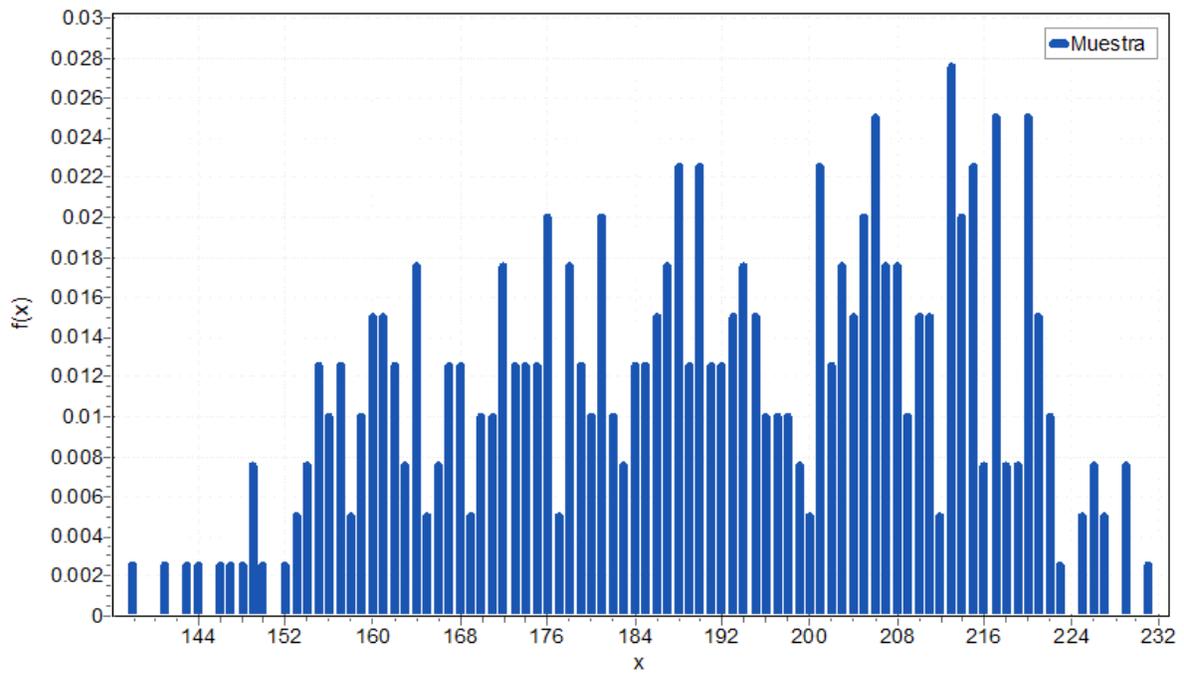


Figura 13. Ejemplo de un diagrama de frecuencias.

3.10.1.1. Definición matemática

Matemáticamente, un histograma es una función m_i que contabiliza el número de observaciones correspondientes a cada categoría o *bin*. Sea, entonces, n el número total de observaciones y k el número total de categorías, el histograma m_i satisface la siguiente condición:

$$n = \sum_{i=1}^k m_i \quad (51)$$

Los diferentes tamaños que pueden tener los bins revelan diferentes características de la información. Las primeras guías sistemáticas para agrupamiento de datos fueron dadas en 1926 por Herber Sturges y, de manera general, mencionan que usar bins más amplios, cuya densidad es baja, reduce el ruido debido a la aleatoriedad del muestreo; mientras que usar bins más angostos, cuya densidad es más alta, da una mejor precisión para la estimación de densidad. Por lo tanto, variar la anchura de los bins de un histograma puede ser benéfico para realizar un mejor análisis, sin embargo, los histogramas con bins de igual tamaño son los más ampliamente utilizados.

A pesar existir diferentes técnicas para determinar el número óptimo de bins o categorías que debe tener un histograma, muchos de los métodos existentes hacen fuertes suposiciones sobre el tipo de distribución. Dependiendo de la distribución actual de los datos y los objetivos del análisis, diferentes tamaños de anchura de los bins podrían ser apropiados, por eso, la experimentación es usualmente necesaria para determinar un ancho apropiado.

El número de bins k de un histograma puede ser asignado directamente o calculado a partir de una anchura de bin h sugerida de la siguiente manera:

$$k = \left\lceil \frac{\max x - \min x}{h} \right\rceil \quad (52)$$

O bien, empleando la raíz cuadrada del número de observaciones:

$$k = \sqrt{n} \quad (53)$$

Uno de los métodos más utilizados es la fórmula de Sturges, la cual se obtiene a partir de una distribución binomial e implícitamente asume una aproximación a la distribución normal, se define como:

$$k = \lceil \log_2 n + 1 \rceil \quad (54)$$

La fórmula de Rice es una alternativa simple a la fórmula de Sturges, y es descrita de la siguiente manera:

$$k = \lceil 2\sqrt[3]{n} \rceil \quad (55)$$

3.10.2. Ajuste de datos a una distribución de probabilidad

El ajuste de datos a una distribución de probabilidad o simplemente llamado ajuste de distribución, es el ajuste de una distribución de probabilidad a un conjunto de datos generados por la medición repetida de la variable de un fenómeno. El objetivo del ajuste de distribución de probabilidad es describir y pronosticar la frecuencia de ocurrencia de la magnitud de un fenómeno dentro de un intervalo de valores.

El ajuste de datos a una distribución consiste de 4 etapas, la primera de ellas es la elección de un modelo o función de una familia de distribuciones.

El análisis exploratorio de los datos puede ser un primer paso, obtener estadísticas y valores descriptivos como la media, la desviación estándar, la asimetría u oblicuidad, o la curtosis, entre otras, y hacer uso de técnicas gráficas como histogramas que puedan sugerir el tipo de función de distribución de probabilidad a usar para ajustar al modelo.

Los histogramas pueden ofrecer una perspectiva sobre la asimetría, el comportamiento en las orillas, la presencia de comportamiento multimodal, y valores atípicos de datos. Sin embargo, los métodos gráficos llegan a ser subjetivos, por lo tanto es recomendado usar métodos con base en expresiones analíticas como el criterio K de Pearson.

Resolviendo una ecuación diferencial particular podemos obtener una familia de funciones que permitan representar casi todas las distribuciones empíricas. Esas curvas dependen únicamente de la media, la varianza, la oblicuidad y la curtosis. Con los datos estandarizados, el tipo de curva dependerá solamente de la medida de oblicuidad y la curtosis como se muestra en la fórmula:

$$K = \frac{\gamma_1^2(\gamma_2 + 6)^2}{4(4\gamma_2 - 3\gamma_1^2 + 12)(2\gamma_2 - 3\gamma_1^2)} \quad (56)$$

Donde $\gamma_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^3}{n\sigma^3}$ es el coeficiente de oblicuidad de Pearson. De la misma manera: $\gamma_2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^4}{n\sigma^4} - 3$ es el coeficiente de curtosis de Pearson.

De acuerdo con el valor de K , obtenido a partir de aplicar la fórmula a los datos disponibles, se tendrá una función en particular.

El siguiente paso para ajustar los datos a una distribución consiste en estimar los parámetros de la función propuesta. En la literatura existen diferentes métodos como los métodos análogos o el método de los L-momentos, sin embargo uno de los más ampliamente utilizados es el método de máxima verosimilitud o MLE por sus siglas en inglés (Maximum likelihood estimation).

En el método MLE se tiene una variable aleatoria con una función de distribución de probabilidad conocida $f(x, \theta)$ que describe una característica cuantitativa de la población. Se debe de estimar el vector de constantes y de parámetros θ desconocidos de acuerdo con la información de muestra x_1, x_2, \dots, x_n .

Éste método comienza con la función matemática de estimación de máxima verosimilitud, esto es, la verosimilitud de un conjunto de datos es la probabilidad de obtener ese conjunto particular de datos dado el modelo de probabilidad elegido. Ésta expresión contiene los parámetros desconocidos, los valores de los parámetros que maximicen la verosimilitud de la muestra son conocidos como estimadores de máxima verosimilitud (MLE), la función de verosimilitud se define como:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (57)$$

De esta manera, el método MLE consiste en encontrar θ que maximice $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta)$, o su función logarítmica:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \theta) \quad (58)$$

Por ejemplo, para el caso de la función de distribución gamma, su función de verosimilitud sería de la forma:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \alpha, \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\lambda x_i} \quad (59)$$

O bien su forma logarítmica:

$$\ln L = n\alpha \ln \lambda - n \ln \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i \quad (60)$$

El tercer paso en durante el proceso de ajuste de datos a una distribución de probabilidad consiste en evaluar la calidad del ajuste. La evaluación de la calidad del ajuste es útil para emparejar frecuencias teóricas con frecuencias ajustadas por un modelo teórico. Hay medidas absolutas y relativas, entre las medidas absolutas se encuentran:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - y_i^*|}{n} \quad (61)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2}{n}} \quad (62)$$

Y en las medidas relativas se pueden usar:

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - y_i^*|}{\sum_{i=1}^n y_i} \quad (63)$$

$$\delta = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2}{n}}}{\sum_{i=1}^n y_i / n} \quad (64)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*)^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \quad (65)$$

Donde, y_i son las frecuencias teóricas y y_i^* son las frecuencias ajustadas por el modelo. Generalmente los índices ξ y δ son expresados en manera de porcentajes.

El último paso para realizar el ajuste de datos a una distribución de probabilidad consiste en realizar pruebas de la bondad de ajuste. El emplear pruebas para medir la bondad de ajuste nos permite decir si es razonable o no asumir que una muestra aleatoria viene o no de una distribución específica.

Las medidas de bondad de ajuste generalmente resumen la discrepancia entre los valores observados y los valores esperados del modelo en cuestión. Estas medidas pueden ser usadas en las pruebas de hipótesis estadísticas, para probar cuando dos muestras son obtenidas a partir de una distribución idéntica (prueba de Kolmogórov-Smirnov), o cuando las frecuencias obtenidas siguen una distribución determinada (prueba χ^2 de Pearson).

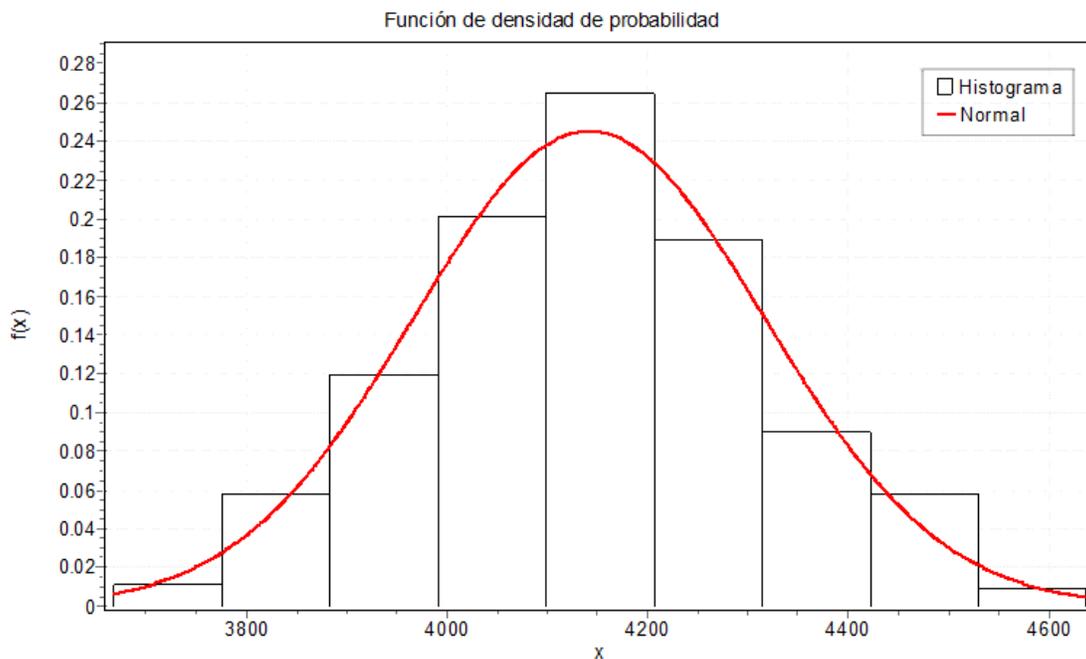


Figura 14. Ejemplo de una distribución de probabilidad ajustada a los datos de un histograma.

3.10.3. Prueba chi cuadrada de Pearson.

La prueba de chi cuadrada de Pearson es la prueba de bondad de ajuste más vieja existente, fue desarrollada en 1900 por Karl Pearson, y fue pensada como una prueba de comparación formal de un histograma con una distribución de probabilidad. Su principal ventaja es que puede ser aplicada a cualquier distribución a la que se le pueda calcular su función de distribución acumulada y cuyos datos se encuentren separados en *bins* o clases.

Por otro lado, el valor obtenido al aplicar la prueba dependerá de la forma en que se hayan agrupado los datos. Otra de las desventajas de ésta prueba es que requiere de datos suficientes para que la aproximación sea válida.

La fórmula que da el valor estadístico se escribe como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (66)$$

Donde χ^2 es el estadístico acumulativo de la prueba de Pearson, O_i la frecuencia observada, E_i la frecuencia teórica esperada, y n el número de clases o bins del histograma.

Para conocer que tan adecuado es el ajuste de datos realizado es necesario comparar el χ^2 obtenido de la prueba de Pearson con el valor crítico de la distribución χ^2 . Entre más cercano a 1 sea esta relación, se dice que mejor es el ajuste.

3.10.4. Prueba de Kolmogórov-Smirnov

La prueba de Kolmogórov-Smirnov (Prueba K-S), es una prueba no paramétrica que puede ser usada para comparar una muestra de datos con una distribución de probabilidad de referencia (one-sample K-S test) o para comparar dos muestras de datos entre sí (two-sample K-S test).

La prueba de Kolmogórov-Smirnov es más sensible a los valores cercanos a la mediana que a los extremos de la distribución.

La fórmula que da el valor estadístico se define de la forma:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \begin{cases} 1 & \text{si } y_i \leq x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (67)$$

La prueba de Kolmogórov-Smirnov destaca sobre la prueba de chi cuadrada de Pearson al no requerir una muestra grande de datos, cuando ambas pruebas tienen una muestra lo suficientemente grande son igual de buenas. La mayor de sus limitaciones recae en el hecho de la necesidad de especificar por completo todos los parámetros de la distribución como son, su origen, altura y

demás parámetros de forma propios, ya que dichos parámetros no pueden ser estimados a partir de la muestra de datos.

3.10.5. Prueba de Anderson–Darling

La prueba de Anderson-Darling es una prueba estadística que permite determinar si una muestra de datos se extrae de una distribución de probabilidad específica.

En su forma básica, ésta prueba asume que no existen parámetros a estimar en la distribución que se está probando, en cuyo caso la prueba y su conjunto de valores críticos siguen una distribución libre. Sin embargo, la prueba se utiliza con mayor frecuencia en contextos en los que se está probando una familia de distribuciones, en cuyo caso deben ser estimados los parámetros de esa familia y debe tenerse estos en cuenta a la hora de ajustar la prueba estadística y sus valores críticos.

Cuando se aplica este método para probar si una distribución normal describe adecuadamente un conjunto de datos, es una de las herramientas estadísticas más potentes para la detección de la mayoría de las desviaciones de la normalidad.

Ésta prueba hace uso del hecho que dada una distribución hipotética subyacente y asumiendo que los datos son obtenidos a partir de ésta distribución, los datos pueden ser transformados en una distribución uniforme. A la muestra de datos transformados se le evalúa su uniformidad con la prueba de distancia de Shapiro. La fórmula de la prueba estadística de Anderson-Darling evalúa si los datos $\{Y_1 < \dots < Y_n\}$ vienen de una distribución con función acumulativa F .

Ésta prueba se realiza mediante la aplicación de la fórmula

$$A^2 = -n - S \quad (68)$$

donde:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{2i - 1}{n} [\ln F(Y_i) + \ln(1 - F(Y_{n+1-i}))] \quad (69)$$

La prueba estadística puede entonces ser comparada con los valores críticos de la distribución teórica. Cabe notar que en ésta prueba, no se estima ningún parámetro de la función de distribución F .

Capítulo IV. Metodología

Se describen los aspectos de la metodología tales como la definición del problema y la construcción del grafo a partir de una red vehicular existente, la búsqueda de una configuración inicial factible, el proceso de optimización multiobjetivo y el análisis de los resultados obtenidos.

Lo primero que se lista es la figura 15, en la que se muestran los pasos a seguir en la metodología; en cada uno de ellos se intenta involucrar tareas necesarias para generar la información necesaria para el siguiente paso.

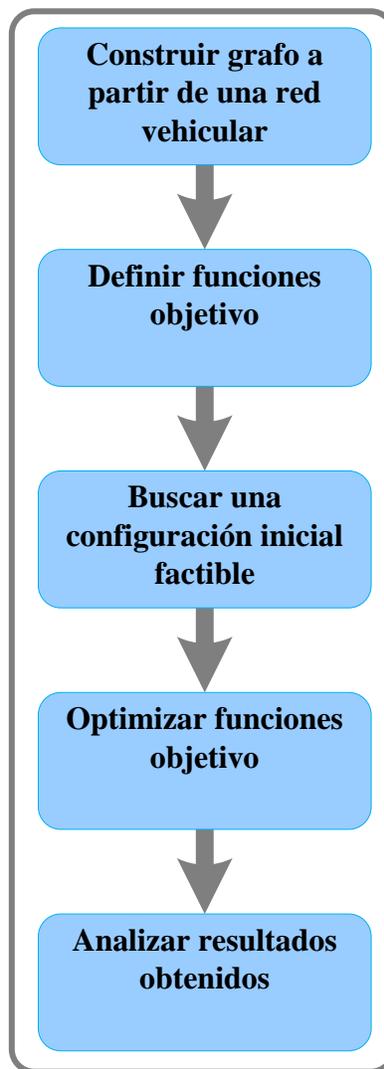


Figura 15. Metodología propuesta.

4.1. Construcción del grafo

Se considera el uso de un modelo matemático para dinámica de fluidos con base en leyes de conservación y se aplicó al estudio del flujo de automóviles en una red vehicular. En este ámbito, las redes vehiculares son estudiadas como grafos dirigidos $G = (V, E)$, compuestos por aristas $(u, v) \in E$ que representan las vialidades de interés a estudiar y que tienen asociadas una capacidad de flujo $C(u, v) > 0$; y de nodos representando las intersecciones entre aristas. Sea $N \subset V$ y $n \in N$, tal que n es un nodo principal por el cual entra o sale flujo de la red vehicular.

La metodología está enfocada en redes vehiculares compuestas por un número finito de vialidades que tienen asociadas capacidades máximas de flujo vehicular C^{max} ; a la vez, estas aristas deben tener asociado un flujo vehicular mínimo C^{min} no permitiendo así aristas sin flujo alguno

$$0 < C_{(u,v)}^{min} \leq C_{(u,v)} \leq C_{(u,v)}^{max}, \quad \forall (u, v) \in E.$$

Por cada arista del grafo se agrega a éste una arista en dirección opuesta a la original, la cual representa el contraflujo de la arista a la cual se asoció. La arista de contraflujo tiene una capacidad igual a la capacidad total de la arista menos su capacidad actual, es decir, en todo momento debe de cumplir:

$$0 < C_{(u,v)}^{min} \leq C_{(u,v)} + C_{(u,v)}^* \leq C_{(u,v)}^{max}, \quad \forall (u, v) \in E.$$

Cabe destacar que se nombra como $C_{(u,v)}^*$ al contraflujo de la arista $C_{(u,v)}$ y no como $C_{(v,u)}$. Con esta consideración se puede tener dos vialidades, que originalmente en el grafo van en sentido contrario, cada una con su propio contraflujo.

Una vez construido el grafo con las vialidades de interés, se establecen los flujos de entrada y de salida en los nodos correspondientes, los nodos por los que no entre o salga flujo al grafo se consideran como nodos de transición o intermedios y deberán tener una suma de flujos igual a cero, esto es, el flujo total entrante en dichos nodos debe ser igual al flujo total de salida

$$\sum_i \Phi_{entrada} - \sum_i \Phi_{salida} = 0, \quad \forall i \in V - N.$$

En los nodos principales por los que entra o sale flujo del grafo se debe de cumplir una condición similar a la anterior, con la diferencia que la suma de los flujos no es cero sino precisamente el flujo que entra o sale a través de él

$$\sum_j \Phi_{entrada} - \sum_j \Phi_{salida} = constante, \quad \forall j \in N.$$

Además la suma total de flujos de entrada en el grafo debe ser igual a la suma de los flujos de salida en éste.

$$\sum_n \phi = 0, \quad \forall n \in N$$

Las condiciones descritas anteriormente se les conocen como *leyes de conservación de flujo*, tal como se puede observar en la figura 16.

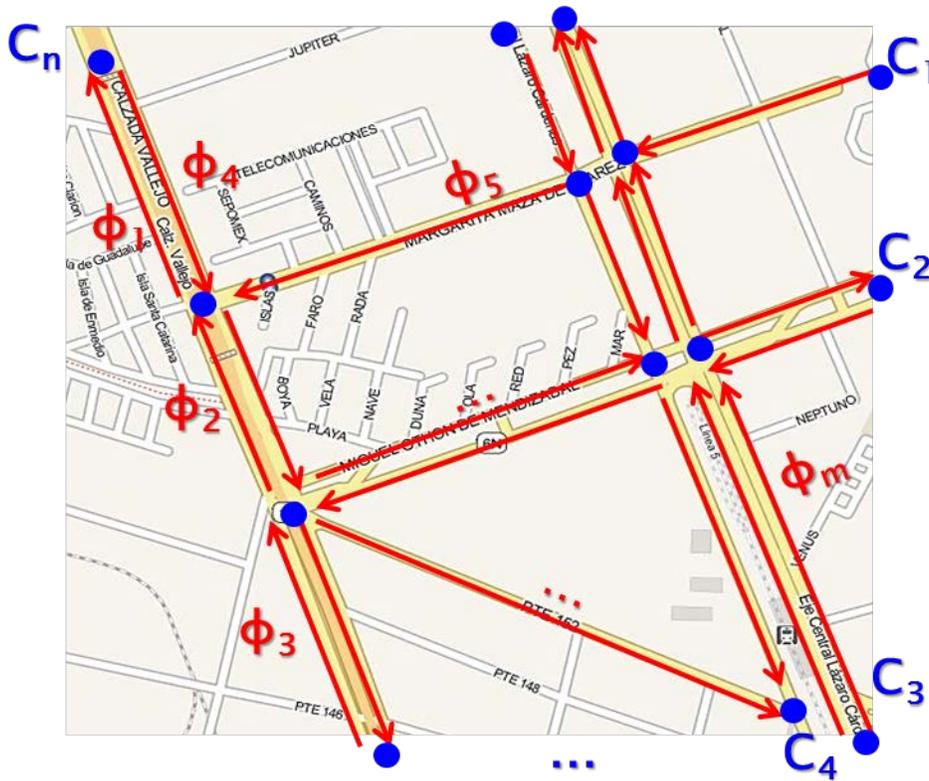


Figura 16. Representación visual de la construcción del grafo a partir de una red vehicular.

4.2. Funciones objetivo

El siguiente paso consiste en proponer la optimización de flujo y definir las funciones objetivo a optimizar. Estas funciones permiten manipular el comportamiento del tránsito vehicular a través de la maximización o minimización del flujo de automóviles en determinadas rutas o aristas. A cada arista se le asocia un peso o factor de ajuste W , para así describir las funciones de la forma:

$$\min/\max(Z_1) = W_{1,1}\phi_1 + W_{2,1}\phi_2 + \dots + W_{m,1}\phi_m$$

$$\min/\max(Z_2) = W_{1,2}\phi_1 + W_{2,2}\phi_2 + \dots + W_{m,2}\phi_m$$

...

$$\min/\max(Z_k) = W_{1,k}\phi_1 + W_{2,k}\phi_2 + \dots + W_{m,k}\phi_m$$

De esta manera se ha descrito nuestro problema de optimización multiobjetivo, que consiste en optimizar cada una de las funciones definidas ($Z_1, Z_2 \dots Z_k$) al mismo tiempo que se satisfacen todas las condiciones de capacidad y de conservación de flujo previamente establecidas.

4.3. Búsqueda de configuración inicial factible

Dada la naturaleza multidimensional del problema, la primera acción a realizar consiste en encontrar una configuración válida a partir de la cual se empiecen a optimizar las funciones objetivo, para ello se establecen porcentajes de holgura en cada una de las condiciones de conservación para posteriormente, durante la búsqueda, minimizar dicha holgura hasta satisfacer las condiciones de conservación.

Para encontrar una configuración válida se realiza una búsqueda utilizando el método del conjunto de nivel (método OCN), realizando pequeños incrementos o decrementos en el flujo de cada una de las aristas. Dicho procedimiento se describe en el siguiente pseudocódigo:

Pseudocódigo.

REPETIR

 Generar un flujo inicial $\phi^{(t)} \in \mathbb{R}^n$ y $t=1$

 Establecer una holgura ε para cada condición de conservación de flujo

 PARA CADA arista HACER

$$\phi^{(t+1)} = \phi^{(t)} + \Delta x$$

 HASTA QUE $\Delta\phi \approx 0$

HASTA QUE $\phi^{(t+1)}$ satisfaga las condiciones de conservación (con holgura)

Si no se llega a una configuración válida se realiza una nueva búsqueda a partir de una nueva configuración inicial.

4.4. Optimización de funciones objetivo

Una vez encontrada una configuración válida, podemos partir de ella para realizar la optimización de las funciones objetivo propuestas. Se aplica nuevamente la búsqueda por el método OCN, pero esta vez para encontrar los máximos y mínimos que optimicen las funciones objetivo.

Para cada nueva configuración óptima que se encuentre se obtienen los flujos correspondientes a cada arista y se guardan en un archivo. Se realiza éste procedimiento hasta que el incremento o decremento sea muy cercano o aproximado a cero, de tal forma que ya no sea significativo. Si no se encuentra alguna solución se realiza la optimización con un valor nuevo para cada arista. A continuación se describe el proceso mencionado anteriormente en forma de pseudocódigo:

Pseudocódigo.

```
REPETIR
  PARA CADA arista HACER
     $\phi^{(t+1)} = \phi^{(t)} + \Delta\phi$ 
  MIENTRAS optimice las funciones objetivo
HASTA QUE  $\Delta\phi \approx 0$ 
```

Si alguna de las condiciones de conservación de flujo no se cumple durante el proceso de búsqueda o de optimización, esto nos indica que existe un problema con las capacidades de las vialidades, es decir, la capacidad de dicha vialidad es insuficiente para la cantidad de flujo que se requiere circule a través de ella.

4.5. Búsqueda y optimización en paralelo

La búsqueda de una configuración válida y la optimización de las funciones objetivo se pueden realizar en unidades de procesamiento independientes (UP), esto debido a que el método OCN no requiere que se establezcan mecanismos de sincronización, ni que exista paso de mensajes o comunicación entre ellos.

Aprovechando las características mencionadas, es posible ejecutar unidades de procesamiento que realicen búsquedas y optimizaciones de manera local a partir de una configuración inicial. De esta manera, se obtienen resultados distintos en cada una de las unidades de procesamiento.

En éste trabajo se dividió de manera empírica la carga de trabajo por unidad de procesamiento, asignando a cada unidad de procesamiento una búsqueda y una optimización (ver figura 17). Por lo que no se descarta que existan otras maneras de dividir dicha carga de trabajo.

En el siguiente pseudocódigo se describe el proceso de búsqueda y optimización que se realiza por cada unidad de procesamiento:

Pseudocódigo.

PARA CADA unidad de procesamiento HACER

REPETIR

Generar un flujo inicial $\phi^{(t)} \in \mathbb{R}^n$ y $t=1$

Establecer una holgura ε para cada condición de conservación de flujo

PARA CADA arista HACER

$$\phi^{(t+1)} = \phi^{(t)} + \Delta x$$

HASTA QUE $\Delta\phi \approx 0$

HASTA QUE $\phi^{(t+1)}$ satisfaga las condiciones de conservación (con holgura)

REPETIR

PARA CADA arista HACER

$$\phi^{(t+1)} = \phi^{(t)} + \Delta\phi$$

MIENTRAS optimice las funciones objetivo

HASTA QUE $\Delta\phi \approx 0$

GUARDAR el resultado obtenido

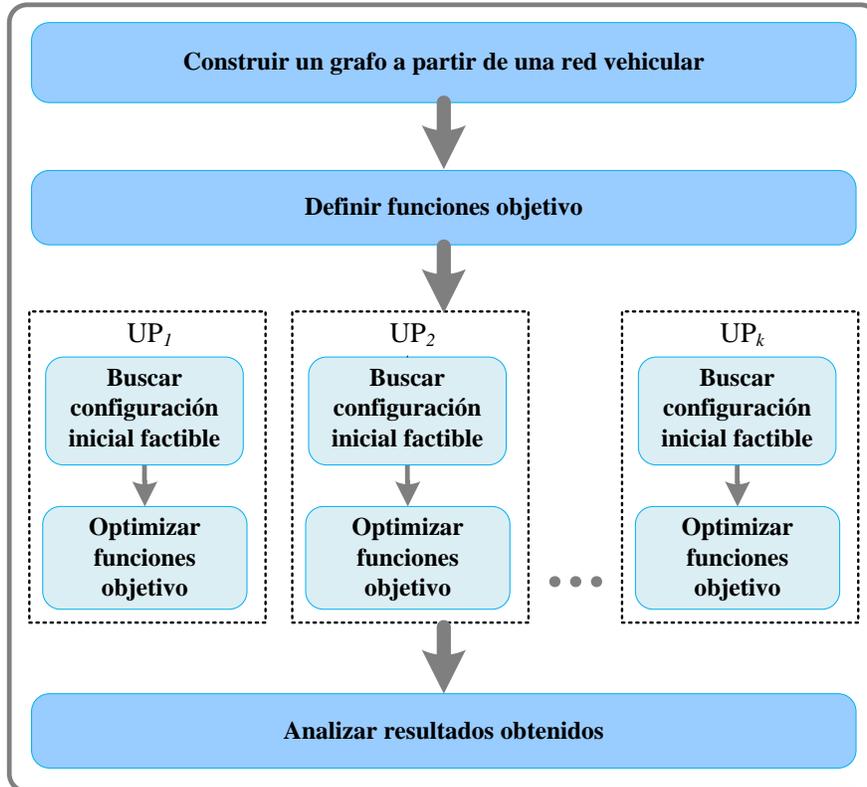


Figura 17. Metodología propuesta para búsqueda y optimización en paralelo.

4.6. Análisis de resultados

Por cada iteración que se realice en el método de optimización se obtienen como resultados la evaluación de las funciones objetivo, los valores de los flujos y contraflujos por arista, y la comprobación de la conservación del flujo por nodo. Además se registra el tiempo total, de ejecución para un análisis estadístico posterior. Todos estos valores se almacenan en archivos de texto plano y se encuentran separados por tabulaciones como se muestra en la figura 18.

158.265643	6.183109	2.055391	1.219705	8.642613	4.963404	2.397425	9.278284	5.944609*	3.780295*	0.357387*	1.036596*	10.602575*	2.721716*	10.040568	-0.037591	-0.069168	-9.933809
159.140643	6.183109	2.055391	1.219705	8.705113	4.963404	2.459925	9.278284	5.944609*	3.780295*	0.294887*	1.036596*	10.540075*	2.721716*	10.040568	-0.037591	-0.069168	-9.933809
160.234393	6.183109	2.055391	1.219705	8.767613	4.963404	2.553675	9.278284	5.944609*	3.780295*	0.232387*	1.036596*	10.446325*	2.721716*	9.978068	-0.037591	-0.069168	-9.871309
161.468768	6.198734	2.071016	1.235330	8.830113	4.963404	2.631800	9.278284	5.928984*	3.764670*	0.169887*	1.036596*	10.368200*	2.721716*	10.009318	-0.068841	-0.100418	-9.840059
162.562516	6.198734	2.071016	1.235330	8.908208	4.963404	2.709925	9.278284	5.928984*	3.764670*	0.091762*	1.036596*	10.290075*	2.721716*	10.009318	-0.068841	-0.100418	-9.840059
163.710955	6.202640	2.071016	1.239236	8.986363	4.963404	2.791956	9.278284	5.928984*	3.760764*	0.019637*	1.036596*	10.208044*	2.721716*	10.009318	-0.068841	-0.108230	-9.832247
163.888690	6.204593	2.071016	1.241189	8.998082	4.963404	2.803675	9.278284	5.928984*	3.758811*	0.001918*	1.036596*	10.196325*	2.721716*	10.013224	-0.068841	-0.112137	-9.832247
163.916033	6.205570	2.071016	1.242165	8.999059	4.963404	2.805628	9.278284	5.928984*	3.757835*	0.000941*	1.036596*	10.194372*	2.721716*	10.013224	-0.068841	-0.114090	-9.830294
163.927264	6.205570	2.071504	1.242165	8.999547	4.963404	2.806117	9.278284	5.928984*	3.757835*	0.000453*	1.036596*	10.193883*	2.721716*	10.014201	-0.069817	-0.114090	-9.830294
163.932391	6.205814	2.071504	1.242410	8.999791	4.963404	2.806361	9.278284	5.928984*	3.757590*	0.000209*	1.036596*	10.193639*	2.721716*	10.014689	-0.069817	-0.114478	-9.830294
163.935809	6.205936	2.071504	1.242532	8.999913	4.963404	2.806605	9.278284	5.928984*	3.757468*	0.000087*	1.036596*	10.193395*	2.721716*	10.014689	-0.069817	-0.114822	-9.830050
163.935809	6.205936	2.071504	1.242532	8.999913	4.963404	2.806605	9.278284	5.928984*	3.757468*	0.000087*	1.036596*	10.193395*	2.721716*	10.014689	-0.069817	-0.114822	-9.830050

Tiempo real: 0.002876 segundos
Tiempo CPU: 0.000000

Figura 18. Ejemplo de archivo de salida.

Para el análisis estadístico de los resultados obtenidos, es necesario generar un histograma normalizado², para el cual el eje de las abscisas representa la cantidad de flujo total en el grafo o en alguna vialidad, y el eje de las ordenadas es la frecuencia con que se obtuvo esa cantidad de flujo del total de experimentos realizados. Éste histograma se encontrará normalizado. En la figura 19 se muestra un ejemplo.

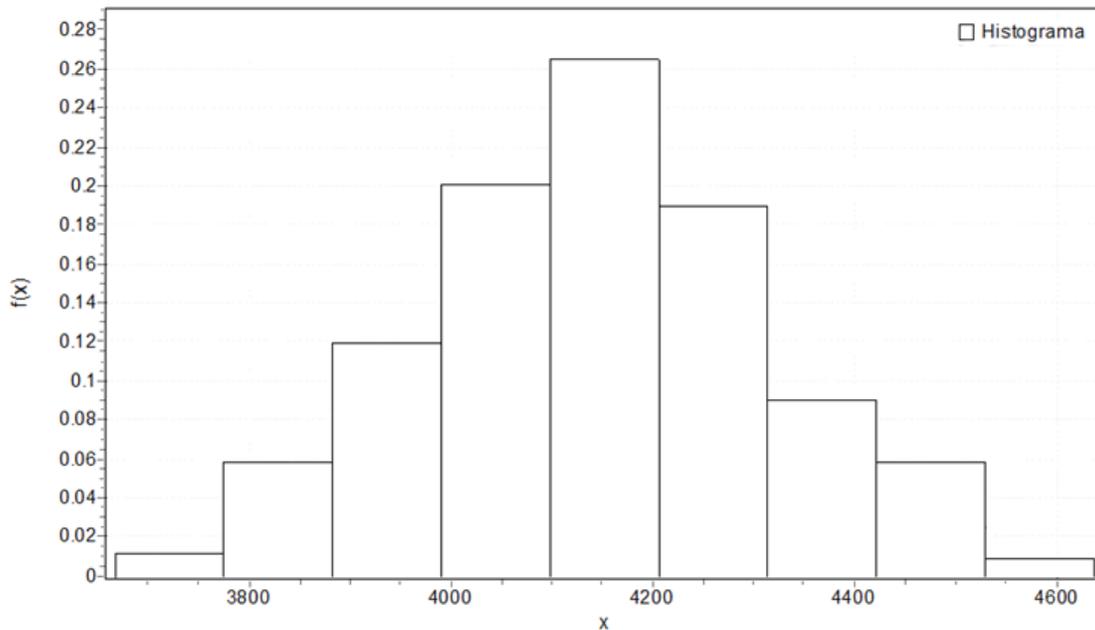


Figura 19. Ejemplo de histograma de flujo para los resultados obtenidos.

² Para un histograma normalizado la suma de todas las frecuencias es igual a 1.

Una vez que se ha generado el histograma, se ajusta una distribución de densidad de probabilidad a los datos de dicho histograma. En la figura 20 se ejemplifica el ajuste de los datos, en éste caso a una distribución normal de probabilidad.

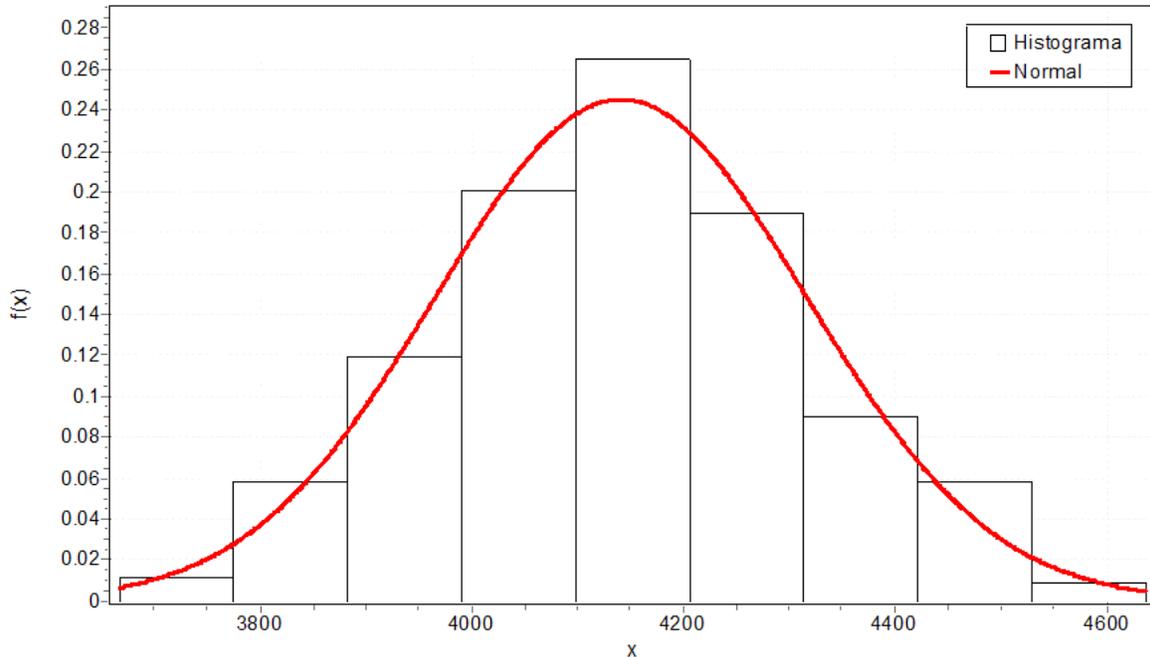


Figura 20. Ejemplo una distribución normal ajustada al histograma.

Obteniendo valores estadísticos como la media, desviación estándar, etc., con base en la distribución que mejor se ajustó. Para seleccionar la distribución que mejor se ajusta a los datos del histograma, se utilizó el software EasyFit en su versión 5.5 pro [45]. Éste software permite probar de entre 61 distribuciones de probabilidad diferentes la que mejor se ajuste [46], considerando 3 diferentes pruebas de ajuste [44].

De manera general se describe el pseudocódigo para elaborar los histogramas:

Pseudocódigo.

Generar un nuevo histograma vacío

PARA CADA optimización obtenida

Agregar un nuevo *bin* al histograma con el valor de los flujos obtenidos.

FIN PARA CADA

Ajustar datos a una distribución de probabilidad

Realizar pruebas de ajuste

Obtener media y desviación estándar

A partir de los resultados obtenidos de las pruebas de ajuste (ver tabla 3), se elige la distribución de probabilidad que mejor se ajusta a los datos. Por cada prueba de ajuste realizada, a cada distribución se le asigna un rango (un entero positivo mayor o igual a 1); siendo el rango con valor 1 la distribución que mejor se ajustó. Considerando 1 el ajuste con menor error.

Durante las pruebas de ajuste se calculan los parámetros de cada función que mejor ajusten la distribución de probabilidad a los datos del histograma (ver tabla 4).

Distribución	Kolmogórov Smirnov		Anderson Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.0336	3	2.4599	3	5.0116	3
Chi cuadrada	0.16495	4	64.349	4	195.79	4
Gamma	0.02589	1	0.19376	1	4.3466	2
Normal	0.02805	2	0.22035	2	3.4248	1

Tabla 3. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=3.2524$ $\alpha_2=3.4146$ $a=3667.5$ $b=4636.9$
Chi cuadrada	$v=4141$
Gamma	$\alpha=558.33$ $\beta=7.4169$
Normal	$\sigma=175.25$ $\mu=4141.1$

Tabla 4. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

Por último, con base en los valores estadísticos obtenidos a partir de la distribución de probabilidad, se determina los valores de flujo y/o configuraciones del grafo más probables, y así ayudar en la toma de decisiones.

Para facilitar la tarea de la toma de decisiones se desarrolló una herramienta de visualización, en la cual, se presenta de manera conveniente el flujo del tránsito vehicular en cada vialidad y se distinguen las zonas en donde se presentan congestionamientos. Como se puede observar en la figura 21, las áreas en color rojo representan las zonas con problemas de congestionamiento, mientras que las zonas en verde y azul señalan áreas con flujo vehicular sin problemas en el flujo vehicular.

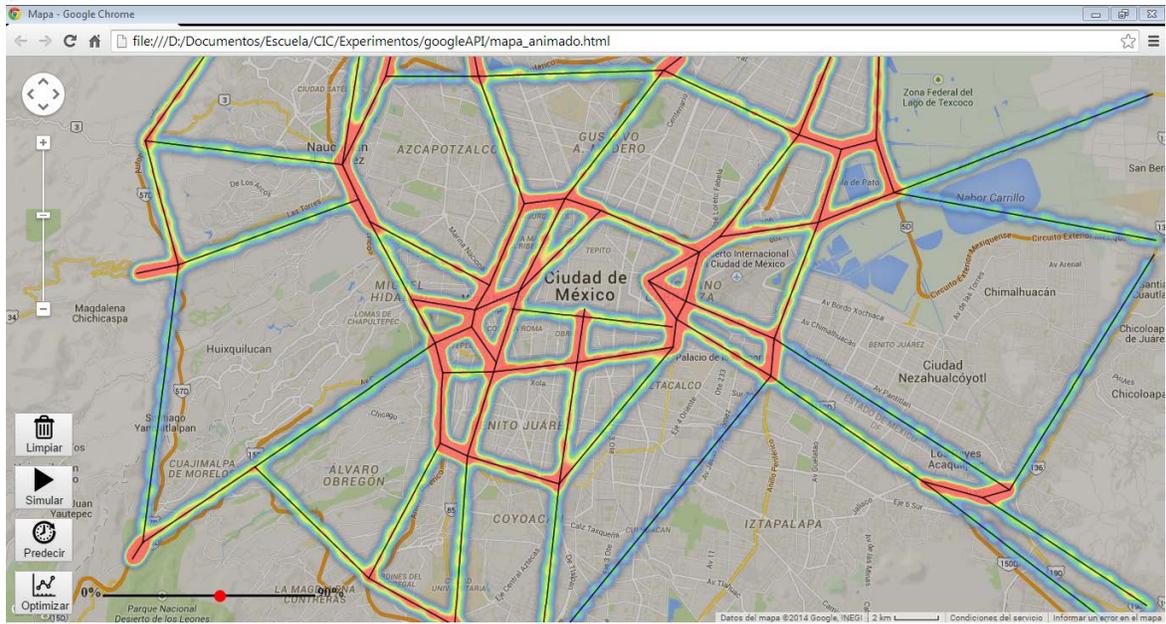


Figura 21. Captura de pantalla de la herramienta de visualización.

Capítulo V. Resultados

En este capítulo se muestran los resultados correspondientes a los pasos descritos en el capítulo IV de este documento. En el Apéndice B se presenta una compilación de todos los experimentos realizados.

5.1. Experimento 1: Grafo con 6 nodos y 10 aristas

Se construyó un grafo de 6 nodos y 10 aristas (ver figura 22), con la configuración descrita en la tabla 5. Se estableció que todas las aristas pudieran tener contraflujo, se permitió un 5% de holgura para las restricciones de capacidad mínima y máxima de cada arista, un flujo de entrada de 10 vehículos por segundo en el nodo 0 y un flujo de salida de 10 vehículos por segundo en el nodo 5.

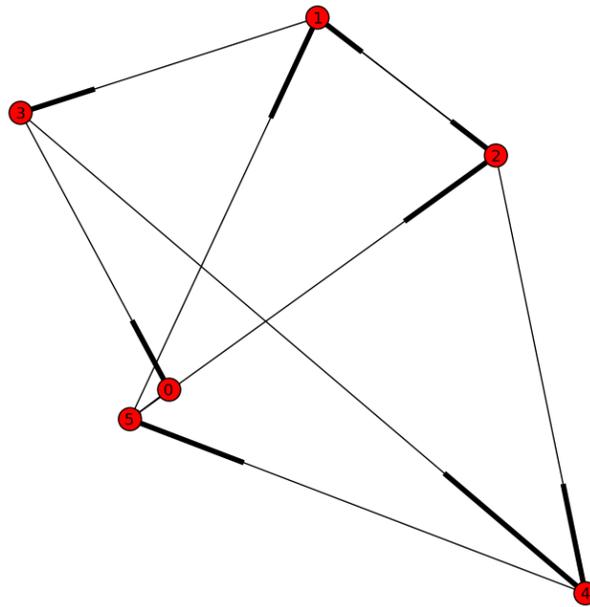


Figura 22. Representación gráfica del grafo.

Para éste problema en particular se definieron dos funciones objetivo como se describe a continuación:

$$\text{Minimizar } Z_1 = 9\Phi_{0,5} + 2\Phi_{1,2} + 10\Phi_{1,3} + 3\Phi_{2,1} + 2\Phi_{2,4} + 10\Phi_{3,1} + 4\Phi_{3,4} + 10\Phi_{4,5} + 8\Phi_{5,1} + \Phi_{5,2}$$

$$\text{Maximizar } Z_2 = \Phi_{0,5} + \Phi_{2,4} + \Phi_{5,2}$$

Nodo origen	Nodo destino	Capacidad mínima	Capacidad máxima
0	5	2	9
1	2	1	11
1	3	2	6
2	1	1	6
2	4	1	10
3	1	2	5
3	4	2	5
4	5	2	9
5	1	1	5
5	2	1	10

Tabla 5. Configuración de valores para el grafo

Con la optimización de las funciones objetivo se obtuvo el histograma que se muestra en la figura 23. En éste caso vemos que la distribución de probabilidad que mejor se ajustó a los datos fue una distribución normal con media en 190.22 y una desviación estándar de 21.483 (ver tabla 6 y tabla 7). Esto significa que el promedio de flujos obtenidos de la optimización se encontrarán entre 157.254 y 223.186

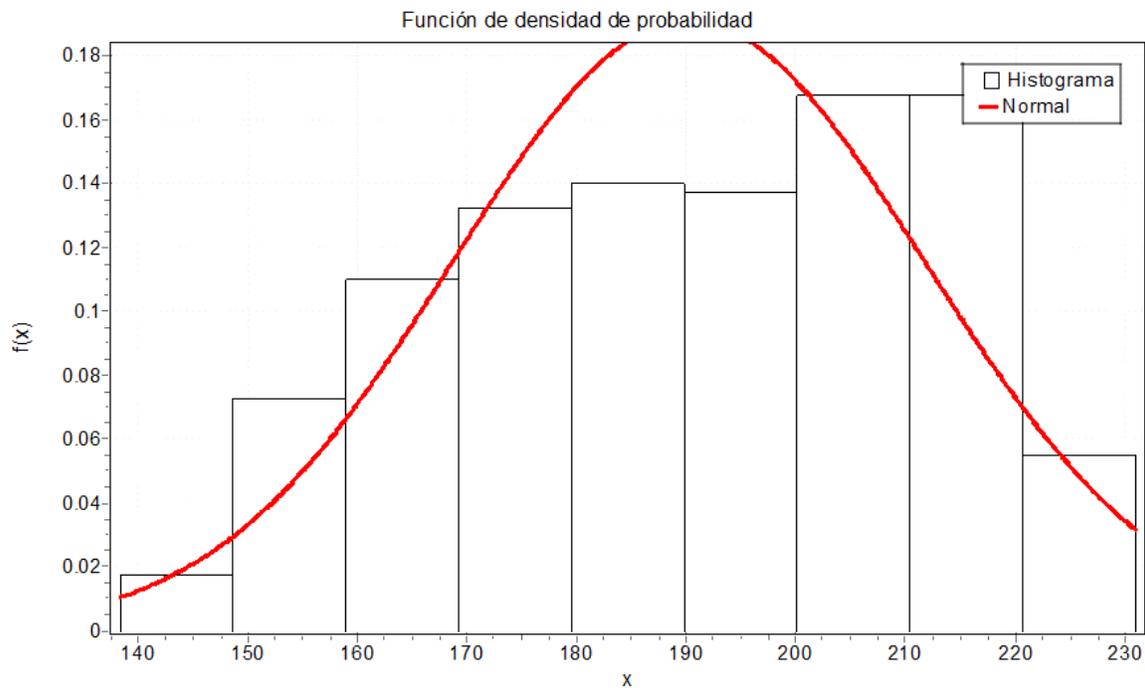


Figura 23. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.

Distribución	Kolmogórov-Smirnov		Anderson-Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.07765	2	3.407	2	24.832	2
Chi cuadrada	0.10733	4	8.0137	4	48.769	4
Gamma	0.08721	3	4.2136	3	28.25	3
Normal	0.03868	1	0.63951	1	9.275	1

Tabla 6. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=2.0189$ $\alpha_2=1.5966$ $a=138.41$ $b=230.94$
Chi cuadrada	$v=190$
Gamma	$\alpha=78.402$ $\beta=2.4262$
Normal	$\sigma=21.483$ $\mu=190.22$

Tabla 7. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

5.2. Experimentos con datos de Google Maps.

Usando los datos estadísticos recabados por Google Maps, a través del uso de dispositivos móviles, se calcularon los flujos de tránsito a partir de las velocidades promedio de cada vialidad. Las líneas en color verde representan una velocidad mayor o igual a 80 km/h, las líneas amarillas una velocidad en un intervalo entre 40 y 80 km/h, mientras que las líneas rojas indican que en esa vialidad hay una velocidad menor a los 40 km/h.

Cabe mencionar que solamente se analizan vialidades principales, es decir, vialidades de las cuales Google Maps tiene los suficientes datos recolectados.

5.2.1. Experimento 2: Lunes 9:00 a.m., México D.F.

El primero de los experimentos que se realizó fue emulando el tránsito vehicular promedio de los días lunes a las 9:00h en la ciudad de México (ver figura 24).

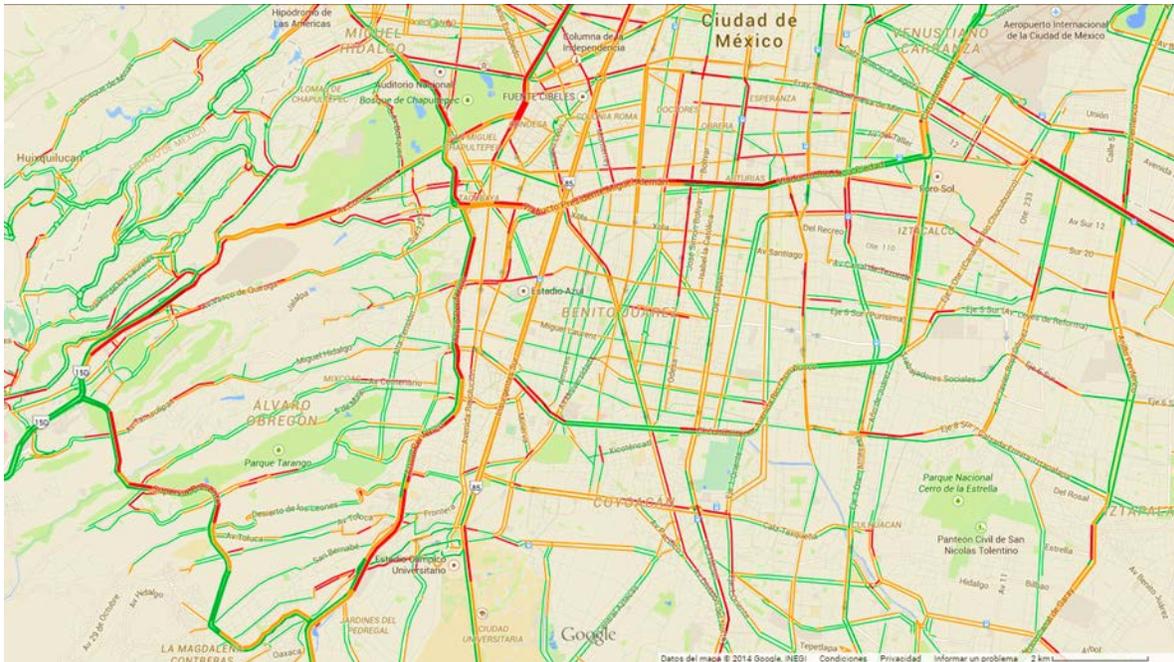


Figura 24. Situación que presentan las vías principales de la Ciudad de México el día lunes a las 9:00 a.m.

Al intentar encontrar una configuración factible para realizar la optimización, se observó con la herramienta de visualización que las vialidades elegidas presentan conflictos vehiculares. Muestra de esto son las manchas rojas que se pueden observar en la figura 25.

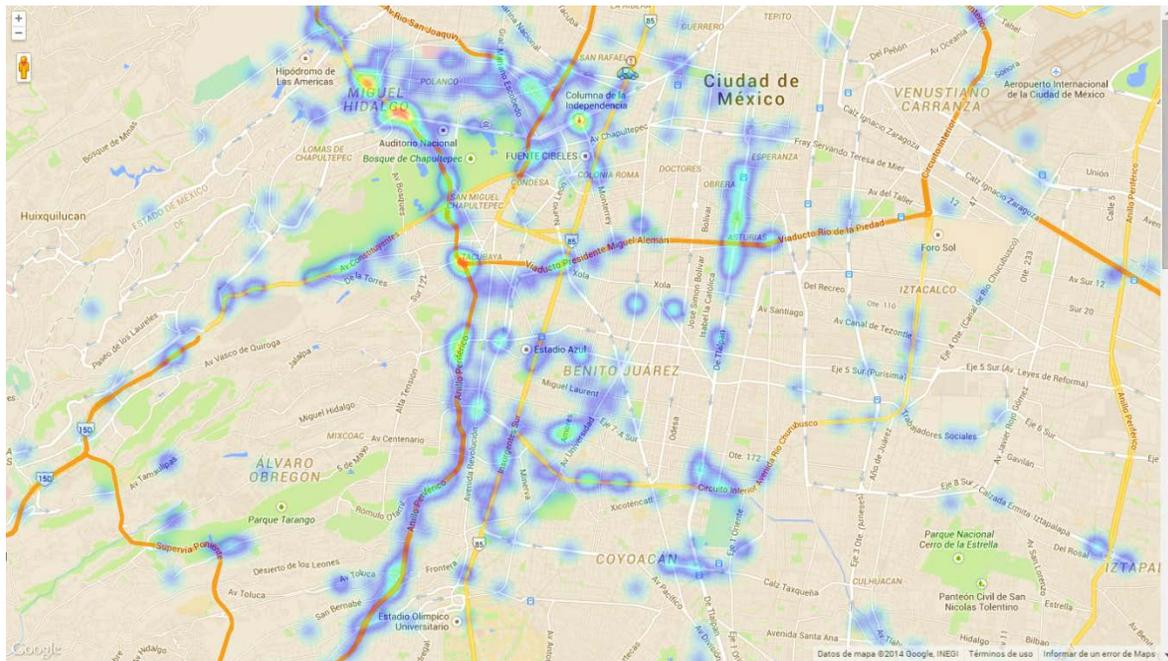


Figura 25. Mapa de la Ciudad de México con el modelado del tránsito vehicular.

El siguiente paso que se realizó fue optimizar la situación actual proponiendo que el 60% de las calles tuvieran contraflujo. Al permitir dichos contraflujos se observó con la herramienta de visualización que gran parte de las zonas con conflicto desaparecieron, aunque siguen existiendo algunas áreas con problemas (ver figura 26).

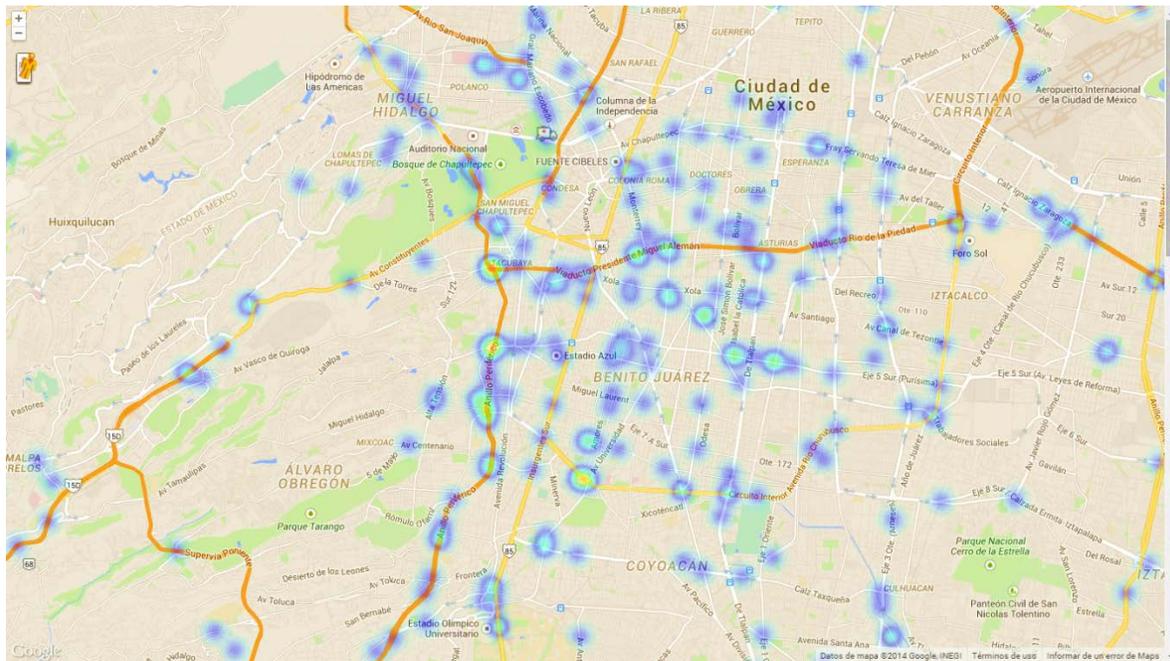


Figura 26. Modelado de las principales vialidades de la Ciudad de México permitiendo que 60% de ellas tengan contraflujos.

El hecho de proponer contraflujos en algunas vialidades permitía disminuir la cantidad de zonas con problemas de congestionamiento. Se ejecutó una nueva optimización, en ésta ocasión estableciendo que el 70% de las vialidades tuvieran contraflujo.

Al realizar lo descrito anteriormente, y haciendo uso nuevamente de la herramienta de visualización desarrollada, se obtuvo como resultado que disminuyeron las zonas con problemas viales. Como se observa en la figura 27, las áreas en rojo disminuyeron en tamaño y en cantidad.

Finalmente se decidió realizar una última optimización, ésta vez proponiendo que 80% de las vialidades tuvieran contraflujo. De nueva cuenta la cantidad de zonas con problemas viales disminuyeron, tal como se observa en la figura 28.

Con el análisis estadístico realizado a éste experimento se obtuvo el histograma que se muestra en la figura 29. En éste caso vemos que la distribución de probabilidad que mejor se ajustó a los datos fue una distribución gamma con media en 5645.6 y una desviación estándar de 140.79 (ver tabla 8 y tabla 9). Esto significa que el promedio de flujos obtenidos de la optimización se encontrarán entre 5364.02 y 5927.18.

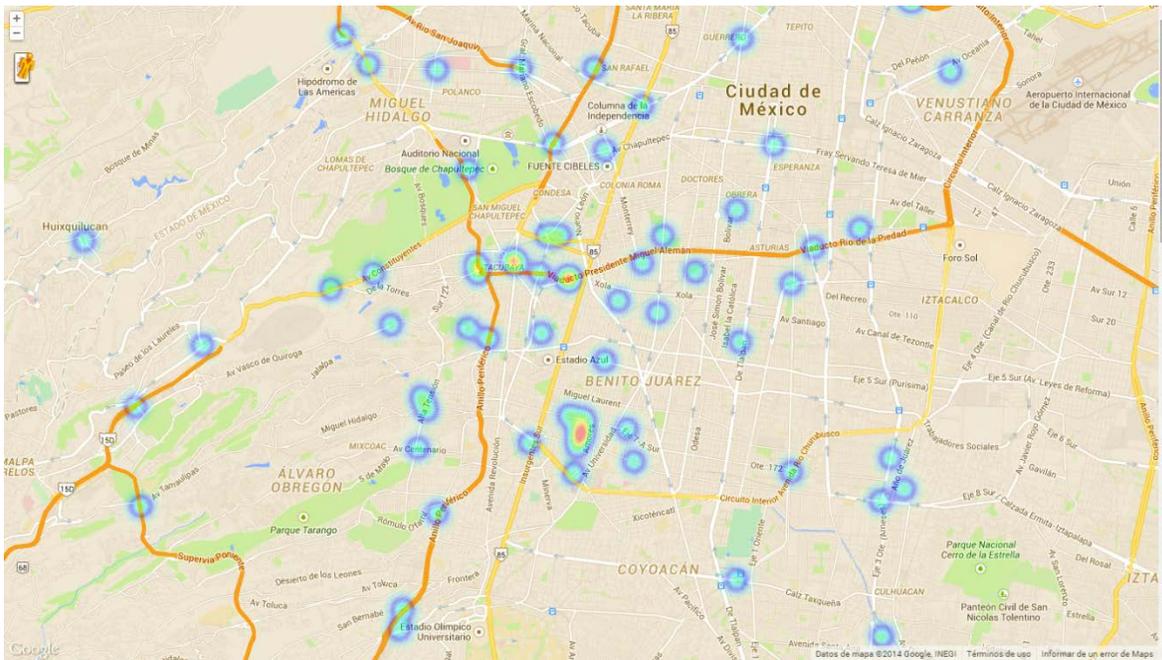


Figura 27. Modelado de las principales vialidades de la Ciudad de México permitiendo que 70% de ellas tengan contraflujos.

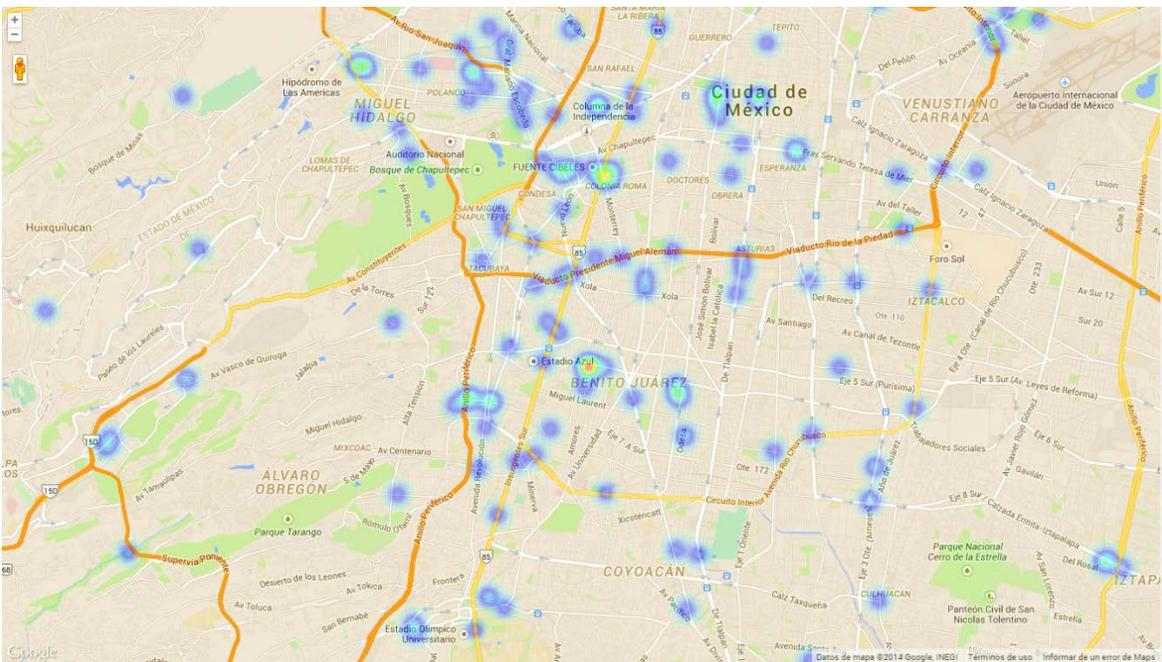


Figura 28. Modelado de las principales vialidades de la Ciudad de México permitiendo que 80% de ellas tengan contraflujos.

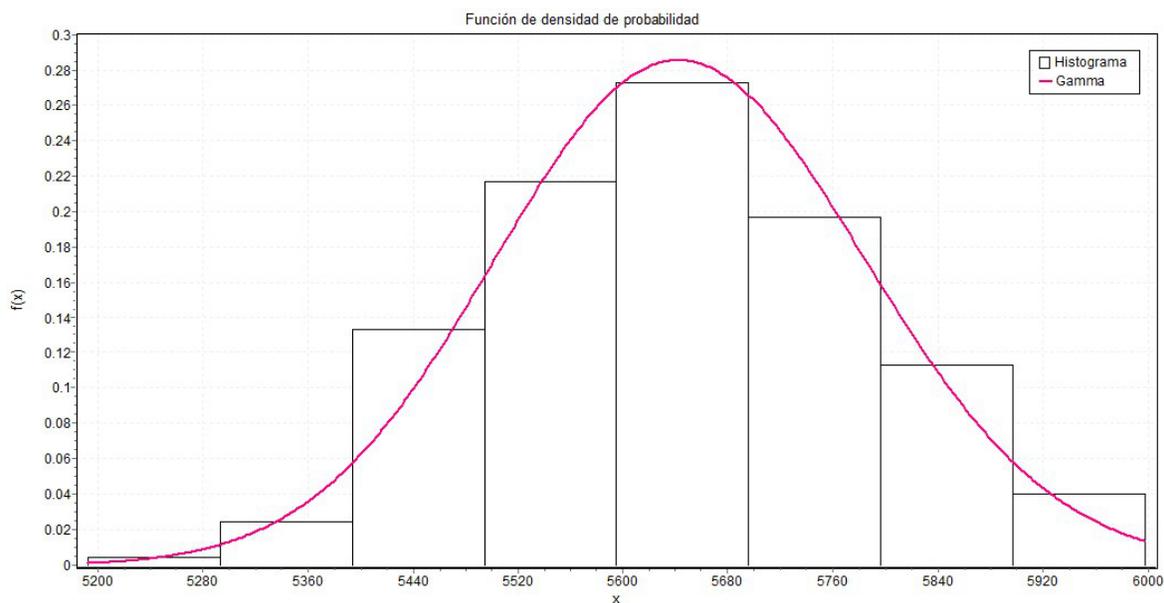


Figura 29. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.

Distribución	Kolmogórov-Smirnov		Anderson-Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.06434	3	3.0823	3	7.6747	4
Chi cuadrada	0.107	4	8.1323	4	5.8508	3
Gamma	0.04	1	0.43983	1	2.9791	1
Normal	0.04086	2	0.47676	2	3.5382	2

Tabla 8. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=4.046$ $\alpha_2=3.0868$ $a=5192.3$ $b=5998.0$
Chi cuadrada	$\nu=5645$
Gamma	$\alpha=1608.0$ $\beta=3.511$
Normal	$\sigma=140.79$ $\mu=5645.6$

Tabla 9. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

5.2.2. Experimento 3: Viernes 7:00 p.m., México D.F.

Con los buenos resultados obtenidos de aplicar la metodología propuesta en una situación real (Experimento 2), se decidió aplicarla para una situación con una cantidad mayor de vialidades y utilizar los datos del tránsito vehicular promedio para los días viernes a las 19:00h en la ciudad de México (ver figura 30).

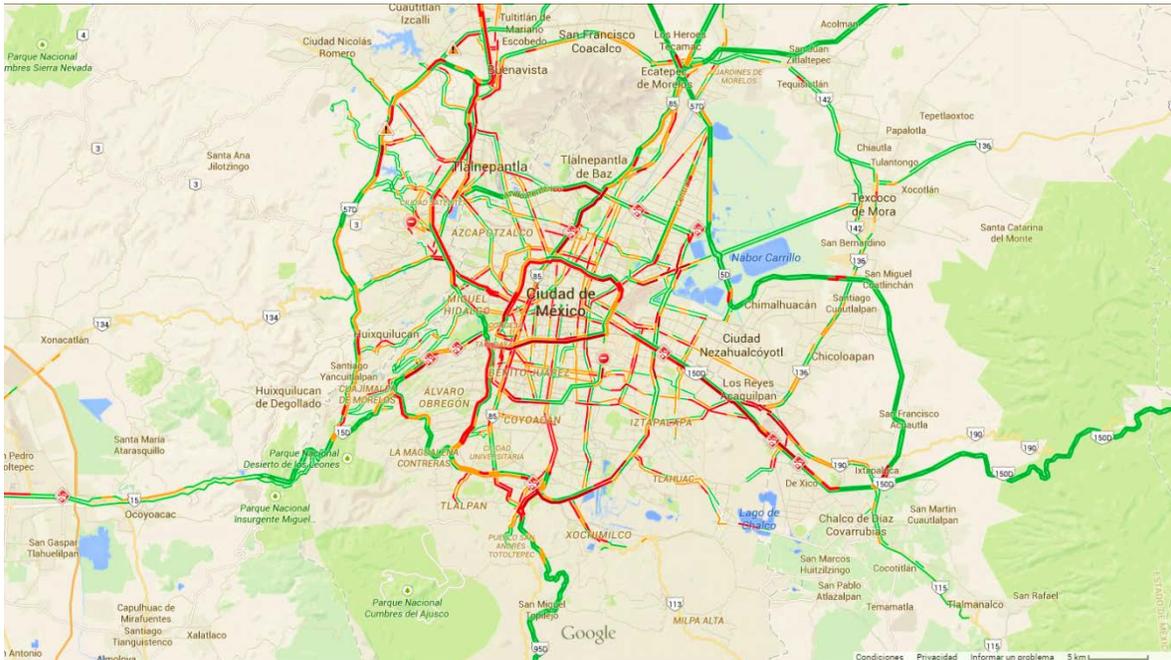


Figura 30. Situación que presentan las vías principales de la Ciudad de México el día viernes a las 7:00 p.m.

El primer paso fue encontrar una configuración factible para realizar la optimización, al hacer uso de la herramienta de visualización se observó que las vialidades elegidas presentan conflictos vehiculares. Muestra de esto son las manchas rojas que se pueden observar en la figura 31.

La mejora que se propuso fue optimizar la situación actual permitiendo que el 85% de las calles tuvieran contraflujo. Al permitir estos contraflujos se observó que gran parte de las zonas de las afueras de la ciudad que presentaban conflicto desaparecieron, sin embargo, la zona centro de la ciudad sigue presentando grandes problemas de tránsito vehicular (ver figura 32).

La reducida capacidad de flujo vehicular que presentan las vialidades de la zona centro de la ciudad responde a el hecho que no se pudiera disminuir los congestionamientos de esa zona.

Con el análisis estadístico realizado a éste experimento se obtuvo el histograma que se muestra en la figura 33. En éste caso vemos que la distribución de probabilidad que mejor se ajustó a los datos fue una distribución gamma con media en 5326 y una desviación estándar de 183.75 (ver tabla 10 y tabla 11). Esto significa que el promedio de flujos obtenidos de la optimización se encontrarán entre 5142.25 y 5509.75.

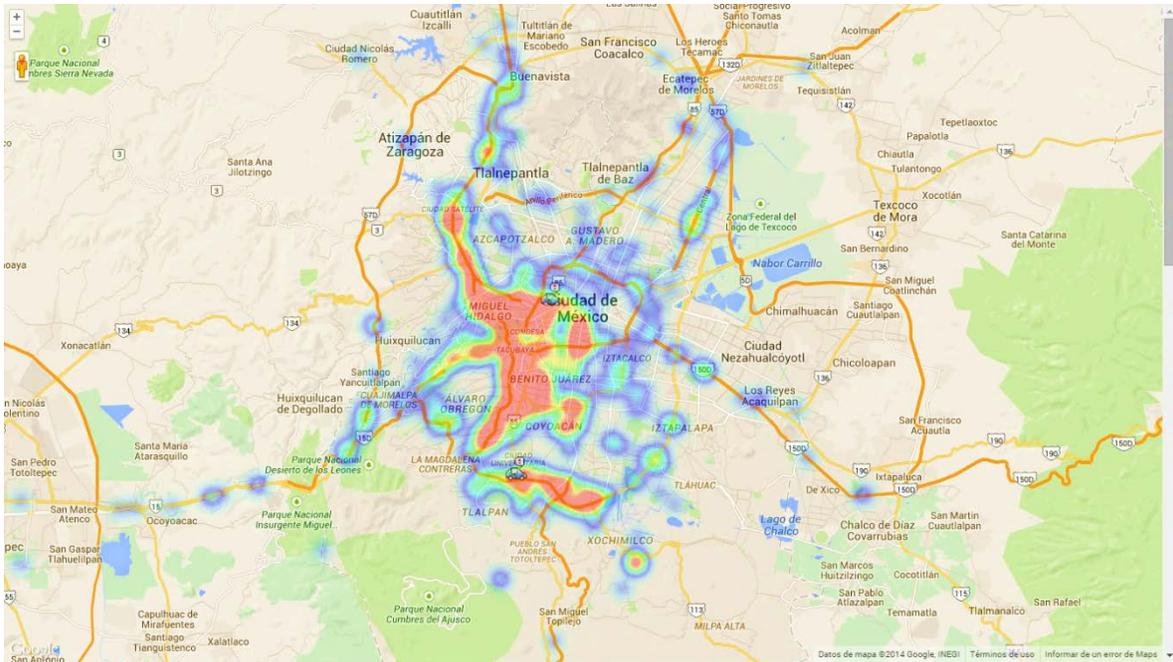


Figura 31. Mapa de la Ciudad de México con el modelado del tránsito vehicular.

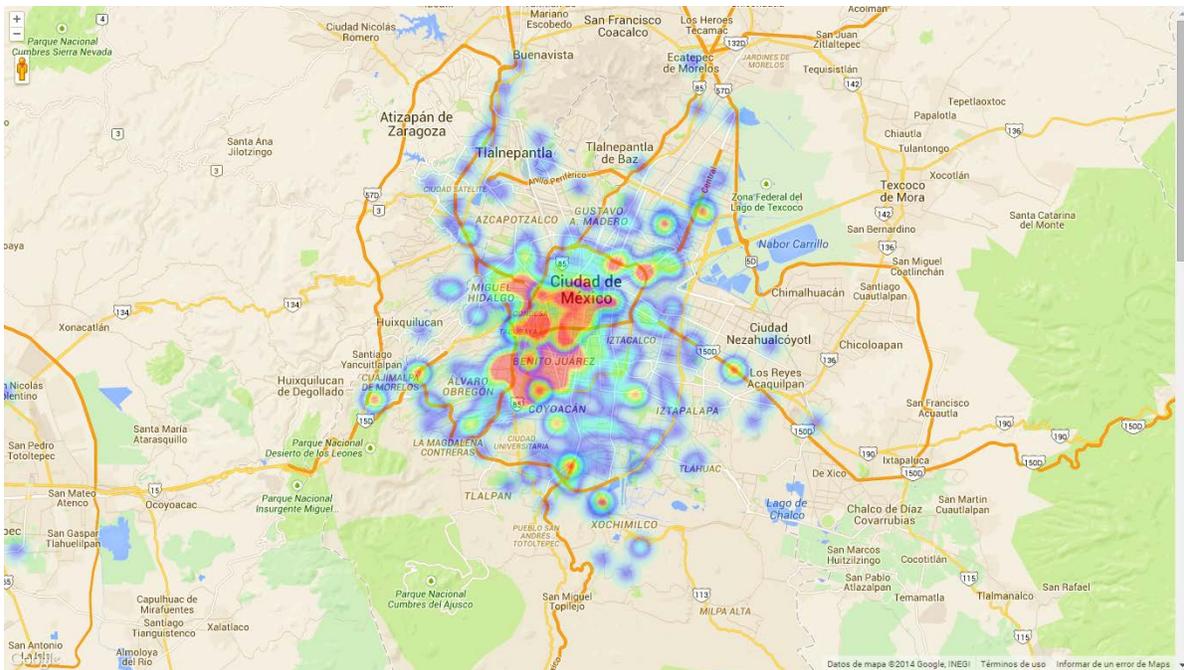


Figura 32. Modelado de las principales vialidades de la Ciudad de México permitiendo que 85% de ellas tengan contraflujos.

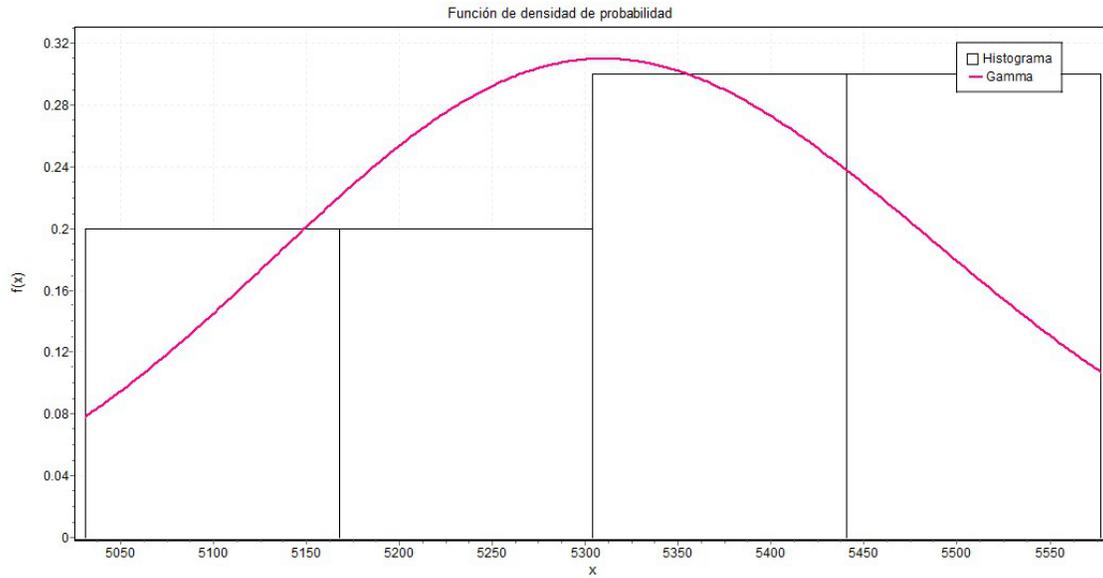


Figura 33. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.

Distribución	Kolmogórov-Smirnov		Anderson-Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.15234	4	1.9694	4	0.04715	3
Chi cuadrada	0.12223	3	0.15344	2	0.08294	4
Gamma	0.11113	2	0.15327	1	0.01008	1
Normal	0.10969	1	0.17883	3	0.01248	2

Tabla 10. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=0.75611$ $\alpha_2=0.56742$ $a=5030.9$ $b=5577.5$
Chi cuadrada	$\nu=5326$
Gamma	$\alpha=840.23$ $\beta=6.339$
Normal	$\sigma=183.75$ $\mu=5326$

Tabla 11. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

5.2.3. Experimento 4: Predicción del comportamiento del tránsito ante el cierre de una vialidad

Por último, se experimentó realizando la predicción del comportamiento del tránsito vehicular que se podría presentar debido al cierre de una vialidad.

Entre los resultados que se obtuvieron de éste experimento destaca el hecho que no sólo las vialidades cercanas resultan afectadas (con aparición de cogestionamiento vial), sino que éste efecto se propaga a otras vialidades incluso lejanas como se ilustra en la figura 34.

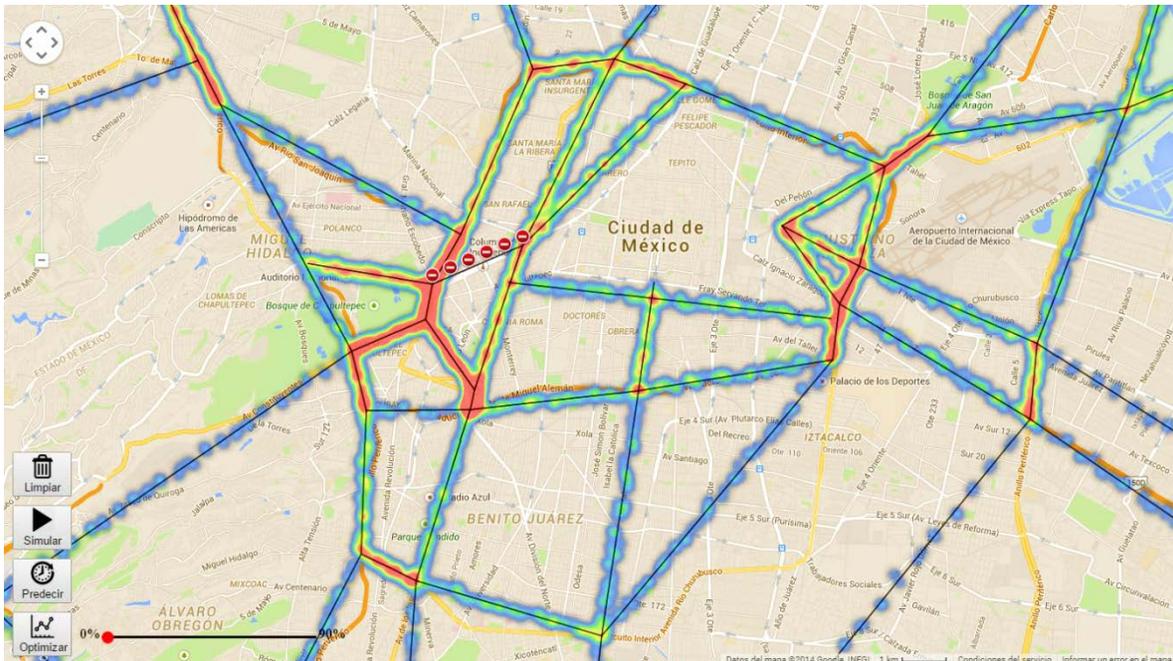


Figura 34. Situación del tránsito vehicular ante el cierre de una vialidad.

Con el análisis estadístico realizado a éste experimento se obtuvo el histograma que se muestra en la figura 35. En éste caso vemos que la distribución de probabilidad que mejor se ajustó a los datos fue una distribución gamma con media en 5143.7 y una desviación estándar de 139.88 (ver tabla 12 y tabla 13). Esto significa que el promedio de flujos obtenidos de la optimización se encontrarán entre 5003.82 y 5283.58.

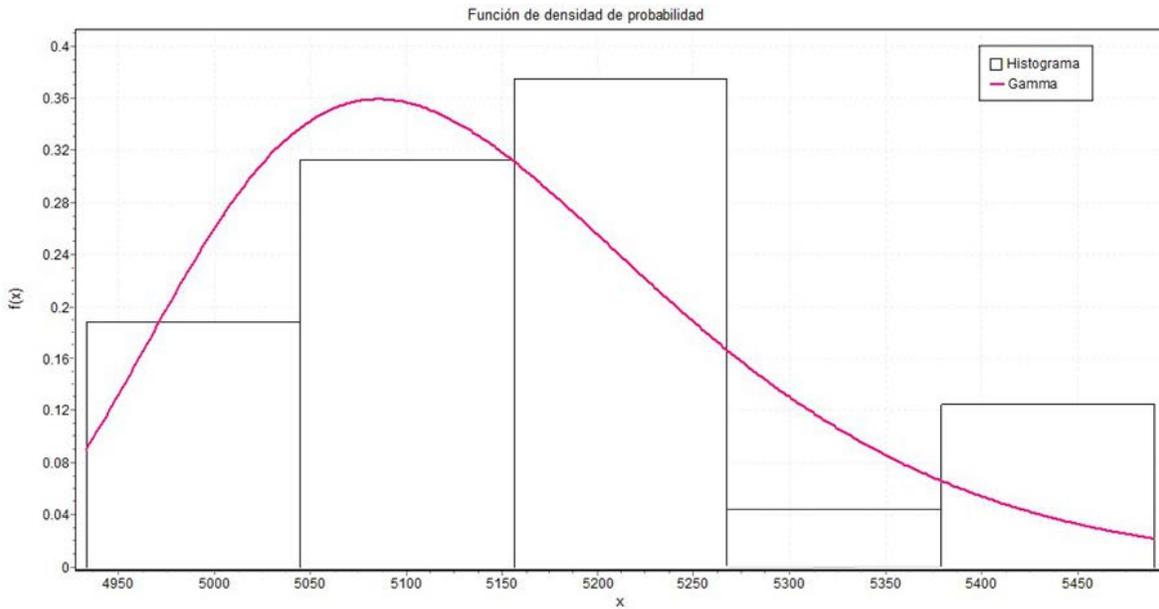


Figura 35. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.

Distribución	Kolmogórov-Smirnov		Anderson-Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.20598	2	1.9184	3	0.08984	1
Chi cuadrada	0.23535	4	2.616	4	1.1903	3
Gamma	0.18649	1	0.62649	1	0.10978	2
Normal	0.21977	3	0.7897	2	1.4698	4

Tabla 12. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=1.1248$ $\alpha_2=1.8764$ $a=4933.4$ $b=5490.2$
Chi cuadrada	$\nu=5143$
Gamma	$\alpha=1352.2$ $\beta=3.8039$
Normal	$\sigma=139.88$ $\mu=5143.7$

Tabla 13. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

Con base en la metodología propuesta se pueden definir diferentes niveles de detalle para estudiar el comportamiento del flujo vehicular, por ejemplo, en la figura 36 podemos observar que se eligió un área menor para estudiar el comportamiento del tránsito vehicular ante la misma situación del cierre de una vialidad.

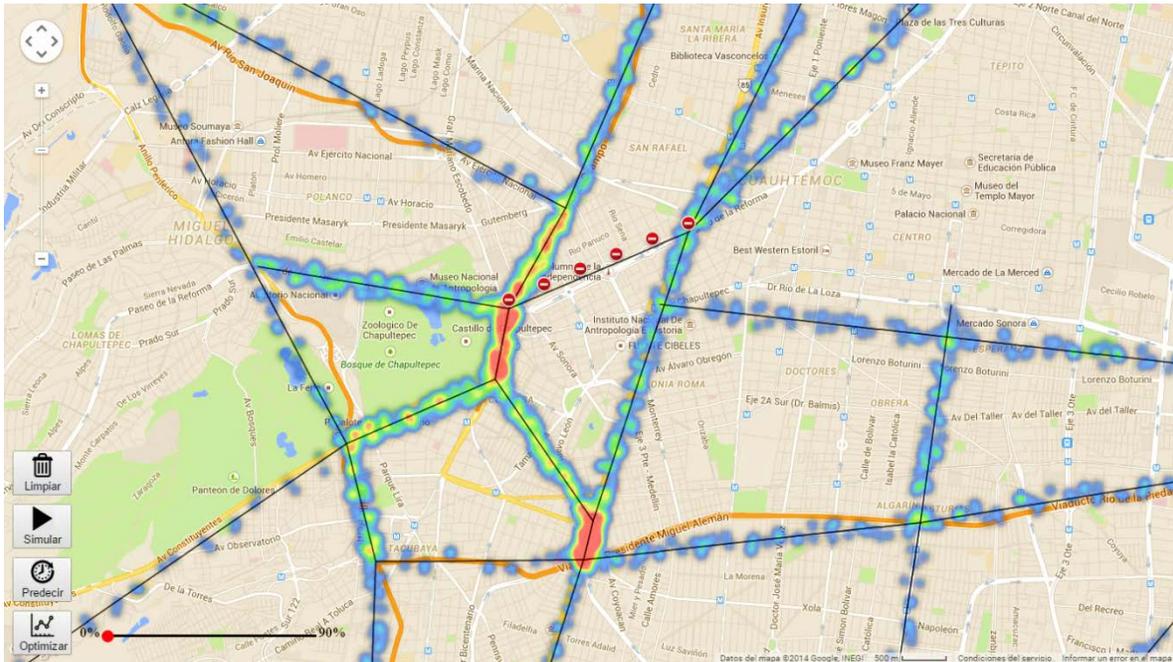


Figura 36. Situación del tránsito vehicular ante el cierre de una vialidad.

El análisis estadístico realizado a éste experimento se obtuvo el histograma que se muestra en la figura 37. En éste caso vemos que la distribución de probabilidad que mejor se ajustó a los datos fue una distribución Weibull con media en 5176.6 y una desviación estándar de 46.279 (ver tabla 14 y tabla 15). Esto significa que el promedio de flujos obtenidos de la optimización se encontrarán entre 5084.042 y 5269.158.

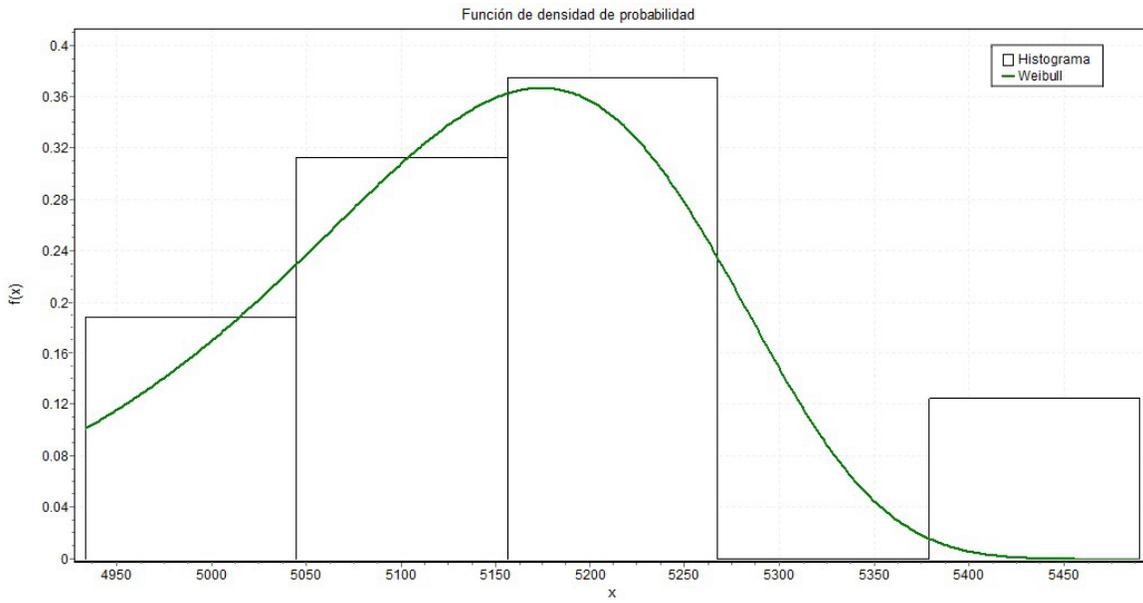


Figura 37. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad Weibull.

Distribución	Kolmogórov-Smirnov		Anderson-Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.25713	3	2.3227	4	0.04167	4
Gamma	0.24488	2	1.1406	2	0.03662	3
Normal	0.28011	4	1.9184	3	0.00151	2
Weibull	0.24446	1	0.8069	1	1.6651E-4	1

Tabla 14. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=1.1248$ $\alpha_2=1.8764$ $a=4933.4$ $b=5490.2$
Gamma	$\alpha=1352.2$ $\beta=3.8039$
Normal	$\sigma=139.88$ $\mu=5143.7$
Weibull	$\alpha=46.279$ $\beta=5176.6$

Tabla 15. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y weibull), para el histograma de los flujos del grafo.

Capítulo VI. Conclusiones y trabajo futuro

En este capítulo se presentan las conclusiones que se han obtenido durante el desarrollo de la tesis y se proponen algunos de los trabajos futuros a desarrollar que podrían surgir con fines de mejorarlo.

6.1. Conclusiones

- Con base en los experimentos realizados se comprobó que el modelo propuesto permite optimizar el comportamiento del tránsito vehicular. Asimismo, permite la predicción del comportamiento del tránsito ante determinadas situaciones.
- La construcción del grafo dirigido a partir de una red vehicular permitió definir direcciones de tránsito, asignar capacidades de flujo y pesos a las vialidades.
- El uso de las ecuaciones de flujo dentro del grafo ayudó a definir el comportamiento del tránsito vehicular entre un par de nodos.
- Se mejoraron los modelos estudiados en el estado del arte al proponer un modelo que optimiza el flujo vehicular considerando la existencia de contraflujos en determinadas vialidades.
- La interpretación de los resultados obtenidos de la aplicación del modelo permitió detectar puntos o secciones donde se presentan congestionamientos viales.
- La aplicación del modelo permite generar estrategias adecuadas para la optimización del flujo de tránsito, la detección temprana de embotellamientos y la predicción de tráfico a corto plazo en los sistemas dinámicos de navegación asistida.

6.2. Trabajo futuro

Con el fin de mejorar este trabajo, se proponen las siguientes líneas de investigación:

- Generalizar el modelo propuesto en éste trabajo al estudio del tránsito vehicular para los casos en los que no se cumple la condición de conservación de flujo, y aquellos casos en los cuales los flujos de entrada y salida varían con el tiempo.
- Proponer una metodología para dividir aquellos grafos que tienen una gran cantidad de nodos y aristas por grafos más pequeños. Solucionándolos de manera individual, ya sea secuencial o paralelamente, para posteriormente ofrecer una solución global.

- Proponer e implementar algoritmos que permitan mejorar el tiempo de ejecución y la precisión en el cálculo de los flujos.
- Extender el modelo propuesto para incluir otros factores que influyen en el comportamiento del tránsito vehicular. Dichos factores podrían ser el estado del tiempo (despejado, nublado, llovizna, chubascos, precipitaciones, tormentas, viento, niebla, neblina), el estado de las vías de transporte (peralte, cambios de pendiente, entre otros), etcétera.
- Definir técnicas y reglas que permitan sugerir la creación de nuevas vialidades que no entren en conflicto con las existentes, o bien, ayuden a remediar las vialidades que presentan problemas de congestión vial.

Apéndice A

A.1. Comparación entre el método PSO y el método OCN

Se realizó una comparación³ de los tiempos de cómputo empleados para la optimización utilizando el método OCN y el método de enjambre de partículas (PSO). Esta comparación se muestra en la tabla 16.

En la tabla 17 se enlistan los diferentes grafos construidos durante la experimentación y se mencionan los tiempos de convergencia a una solución óptima. Los tiempos reportados son tiempos promedio que se obtuvieron de haber utilizado el método OCN.

Nodos	Aristas	Tiempo (segundos)	
		Método PSO	Método OCN
4	6	0.0182	0.0004
6	15	0.7694	0.0216
8	24	127.3812	0.1291
10	28	473.7058	0.2347
12	30	1287.6631	0.3105

Tabla 16. Comparación entre los tiempos de optimización usando el método PSO y el método OCN.

³ No es el objetivo principal de éste trabajo, pero se realizó porque hay que encontrar un resultado más rápidamente.

Nodos	Aristas	Tiempo (Segundos)
45	184	601.05
47	147	532.2024
50	213	564.8804
55	234	557.7638
60	256	596.1945
65	274	1843.6125
68	284	1250.7034
72	276	1606.159
75	320	1988.34
110	259	3864.958

Tabla 17. *Relación de los grafos construidos con el tiempo que tardan en converger a una solución.*

Apéndice B

Como continuación del capítulo V, se presentan los resultados obtenidos de la optimización del flujo realizada en diversos grafos.

B.1. Experimento 1: Grafo 4 nodos y 6 aristas

Los resultados se muestran en las siguientes gráficas:

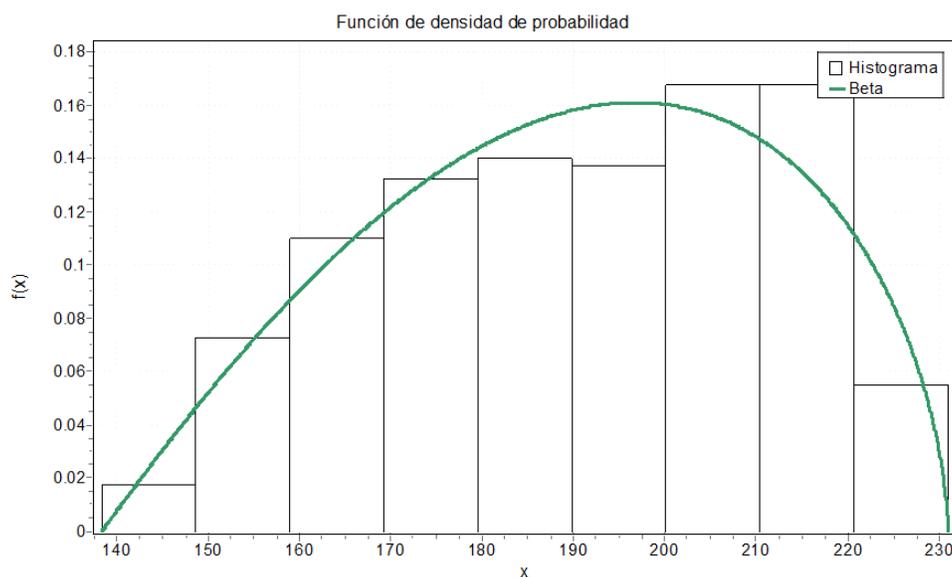


Figura 38. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad beta.

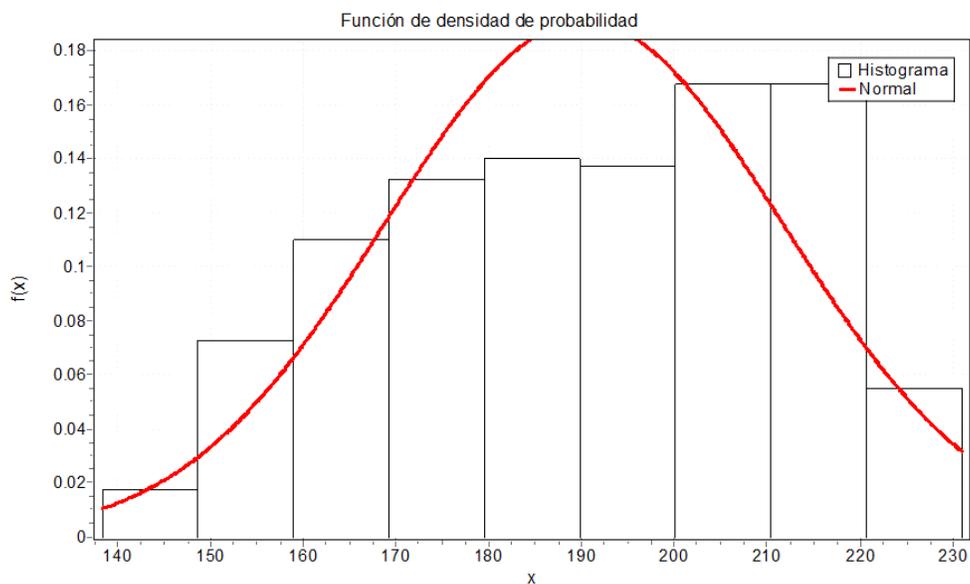


Figura 39. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.

Distribución	Kolmogórov Smirnov		Anderson Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.03868	1	0.63951	1	9.275	1
Chi cuadrada	0.10733	4	8.0137	4	48.769	4
Gamma	0.08721	3	4.2136	3	28.25	3
Normal	0.07765	2	3.407	2	24.832	2

Tabla 18. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=2.0189$ $\alpha_2=1.5966$ $a=138.41$ $b=230.94$
Chi cuadrada	$v = 190$
Gamma	$\alpha = 78.402$ $\beta = 2.4262$
Normal	$\sigma = 21.483$ $\mu = 190.22$

Tabla 19. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

B.2. Experimento 2: Grafo 19 nodos y 64 aristas

Los resultados se muestran en las siguientes gráficas:

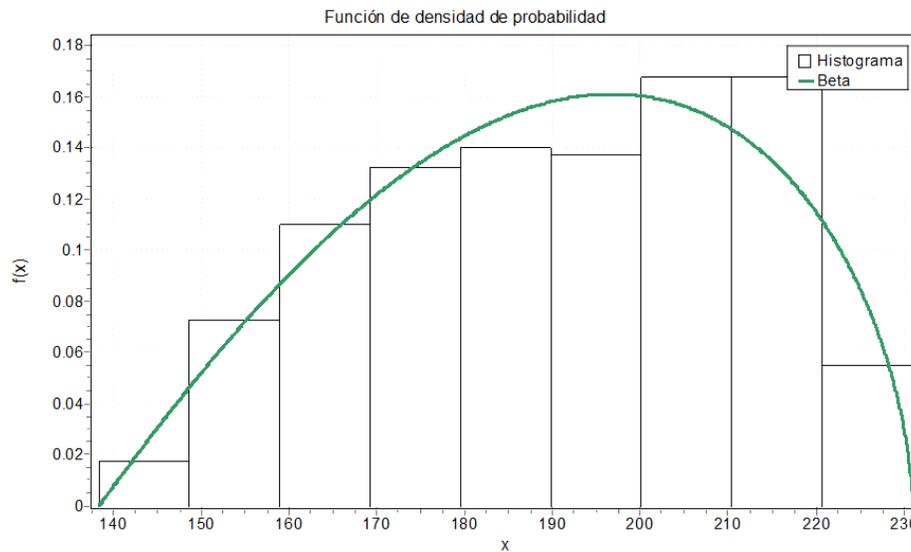


Figura 40. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad beta.

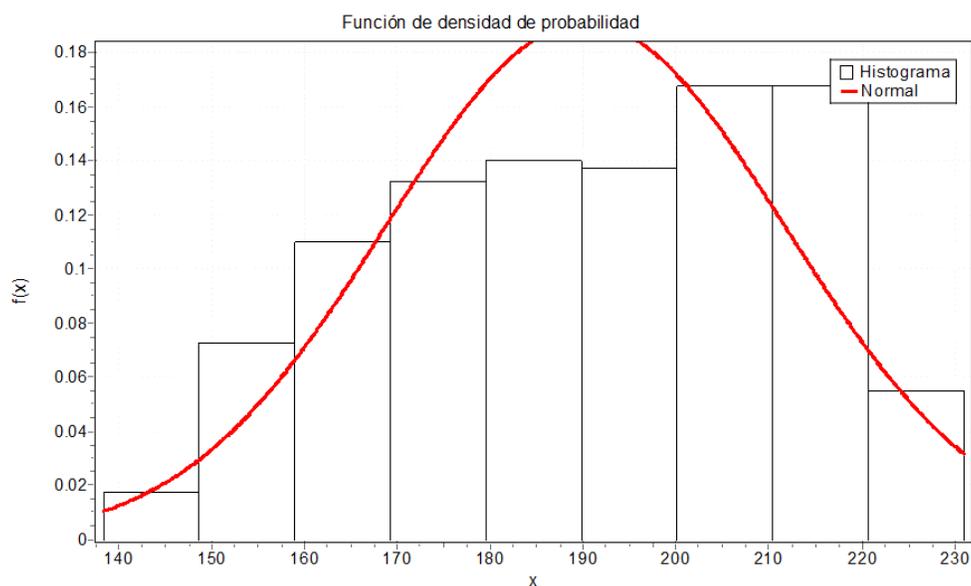


Figura 41. Histograma del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.

Distribución	Kolmogórov Smirnov		Anderson Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.03868	1	0.63951	1	9.275	1
Chi cuadrada	0.10733	4	8.0137	4	48.769	4
Gamma	0.08721	3	4.2136	3	28.25	3
Normal	0.07765	2	3.407	2	24.832	2

Tabla 20. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=2.0189$ $\alpha_2=1.5966$ $a=138.41$ $b=230.94$
Chi cuadrada	$v=190$
Gamma	$\alpha=78.402$ $\beta=2.4262$
Normal	$\sigma=21.483$ $\mu=190.22$

Tabla 21. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

B.3. Experimento 3: Grafo 50 nodos y 213 aristas

Los resultados se muestran en las siguientes gráficas:

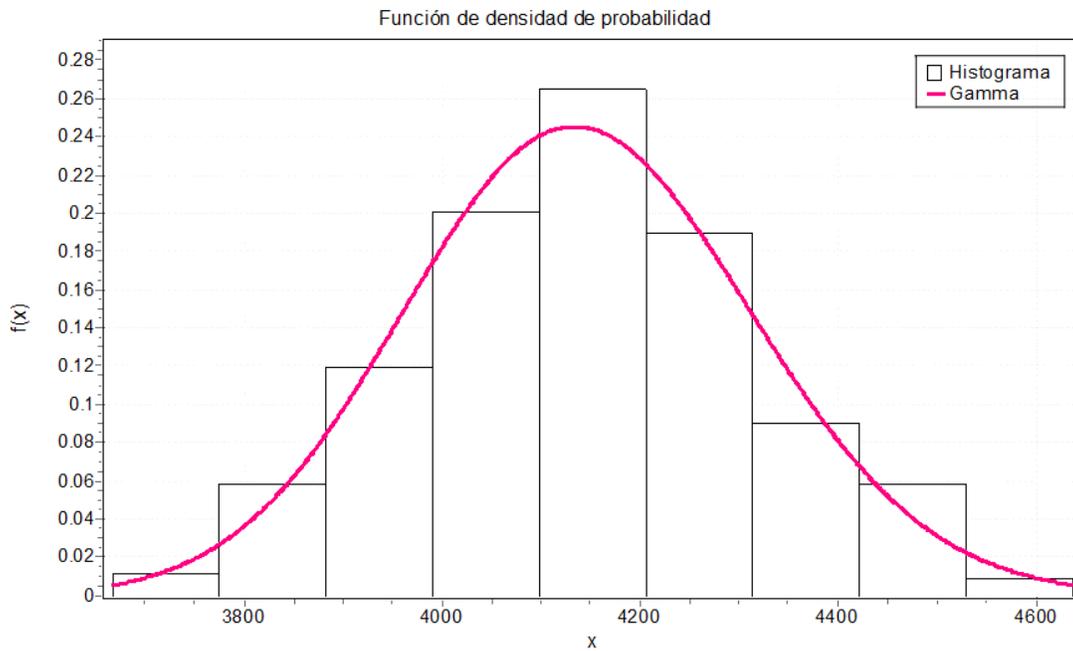


Figura 42. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.

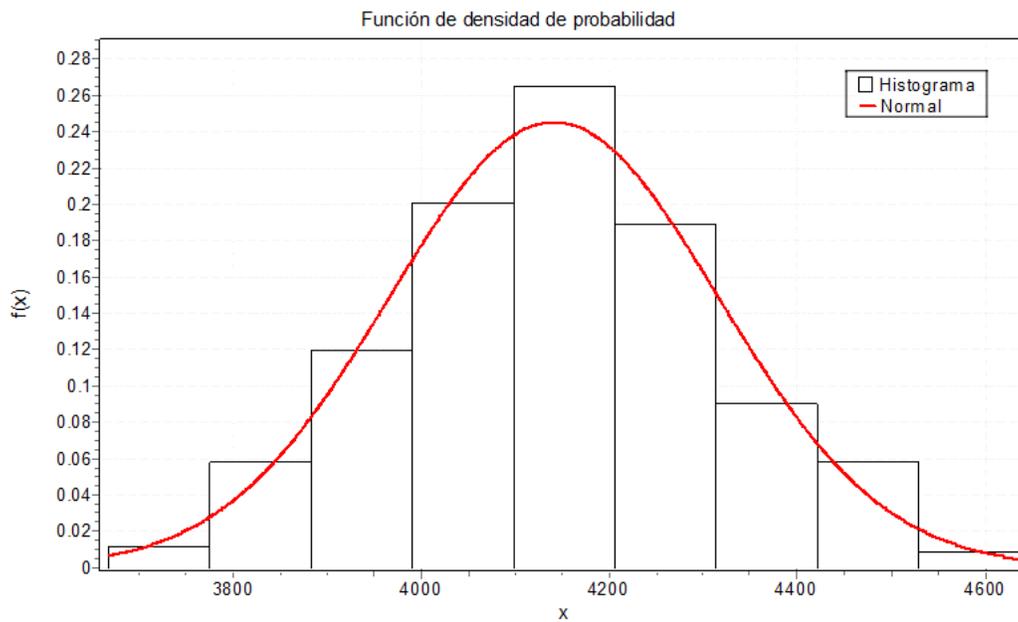


Figura 43. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.

Distribución	Kolmogórov Smirnov		Anderson Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.0336	3	2.4599	3	5.0116	3
Chi cuadrada	0.16495	4	64.349	4	195.79	4
Gamma	0.02589	1	0.19376	1	4.3466	2
Normal	0.02805	2	0.22035	2	3.4248	1

Tabla 22. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=3.2524$ $\alpha_2=3.4146$ $a=3667.5$ $b=4636.9$
Chi cuadrada	$v=4141$
Gamma	$\alpha=558.33$ $\beta=7.4169$
Normal	$\sigma=175.25$ $\mu=4141.1$

Tabla 23. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

B.4. Experimento 4: Grafo 75 nodos 320 aristas

Los resultados se muestran en las siguientes gráficas:

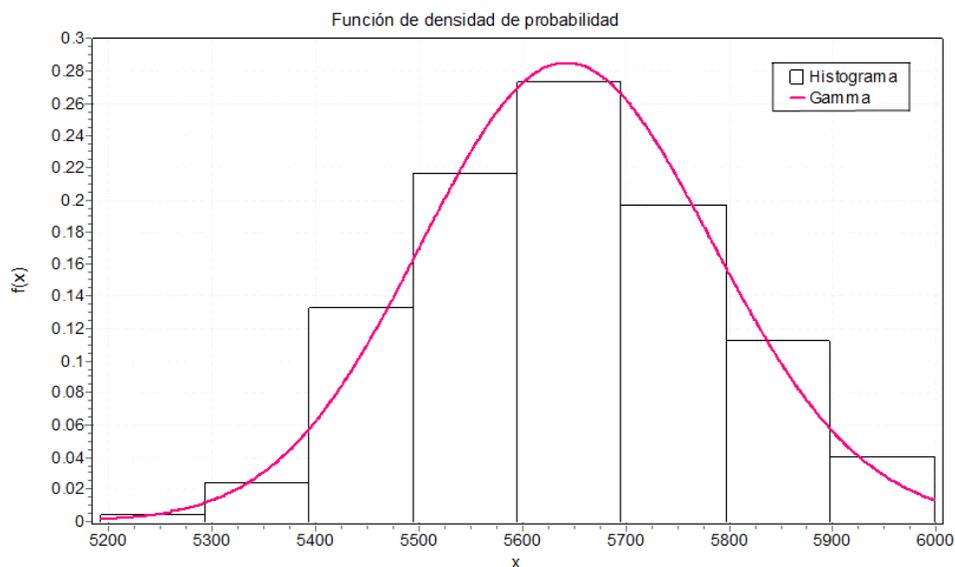


Figura 44. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad gamma.

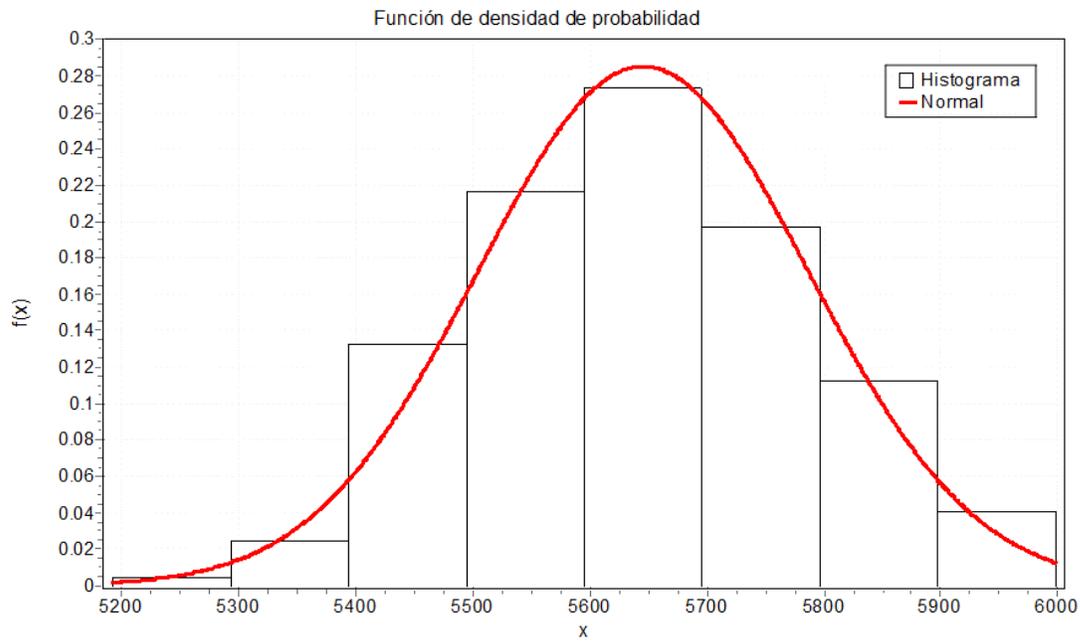


Figura 45. Histograma de los flujos del grafo optimizado, ajustado a una distribución de probabilidad normal.

Distribución	Kolmogórov Smirnov		Anderson Darling		Chi cuadrada	
	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango	Estadístico	Rango
Beta	0.06434	3	3.0823	3	7.6747	3
Chi cuadrada	0.107	4	8.1323	4	41.763	4
Gamma	0.04	1	0.43983	1	2.9791	1
Normal	0.04086	2	0.47676	2	3.5382	2

Tabla 24. Comparación de ajuste para las distribuciones aplicadas al histograma.

Distribución	Parámetros
Beta	$\alpha_1=4.046$ $\alpha_2=3.0868$ $a=5192.3$ $b=5998.0$
Chi cuadrada	$\nu=5645$
Gamma	$\alpha=1608.0$ $\beta=3.511$
Normal	$\sigma=140.79$ $\mu=5645.6$

Tabla 25. Parámetros encontrados para las distribuciones de probabilidad (β , χ^2 , γ y normal), para el histograma de los flujos del grafo.

Bibliografía

- 1 Aw, A., & Rascle, M. (2000). Resurrection of “second order” models of traffic flow. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(3), 916–938.
- 2 Bando, M., Hasabe, K., Nakayama, A., Shibata, A., & Sugiyama, Y. (1995). Dynamical model of traffic congestion and numerical solution. *Physical Review E*, 51(2), 1035-1042.
- 3 Ben-Akiva, M., Bierlaire, M., Koutsopoulos, H., & Mishalani, R. (2002). Real Time Simulation of Traffic Demand-Supply Interactions within DynaMIT. En M. Gendreau, & P. Marcotte, *Transportation and Network Analysis: Current Trends* (Vol. 63, págs. 19-36). Boston, USA: Springer US.
- 4 Biham, O., Middleton, A., & Levine, D. (1992). Self-organization and a dynamical transition in traffic-flow models. *Physical Review A*, 46(10), 6124-6127.
- 5 Bilchev, G., & Parmee, I. (1995). The Ant Colony Metaphor for Searching Continuous Design Spaces. En T. C. Fogarty (Ed.), *Evolutionary Computing* (Vol. 993, págs. 25-39). Sheffield, UK: Springer Berlin Heidelberg.
- 6 Braess, D., Nagurney, A., & Wakolbinger, T. (2005). On a Paradox of Traffic Planning. *Transportation Science*, 39(4), 446-450.
- 7 Bunday, B. D., & Garside, G. R. (1987). *Optimisation methods in PASCAL* (Primera ed.). (E. Arnold, Ed.) London, UK.
- 8 Burghout, W., Kotsopoulos, H., & Andréasson, I. (2005). Hybrid mesoscopic–microscopic traffic simulation. *Proceedings of the 83rd Transportation Research Board annual meeting*.
- 9 Cao, L., Shi, Z., & Bao, P. (2006). Self-adaptive Length Genetic Algorithm for Urban Rerouting Problem. En L. Jiao, L. Wang, X. Gao, J. Liu, & F. Wu (Edits.), *Advances in Natural Computation* (Vol. 4221, págs. 726-729). Springer Berlin Heidelberg.
- 10 CERN. (enero de 2013). *ROOT / A Data Analysis Framework*. Obtenido de <http://www.root.cern.ch/drupal/>
- 11 Chandler, R. E., Herman, R., & Montroll, E. W. (1958). Traffic Dynamics: Studies in Car Following. *Operations Research*, 6(2), 165-184.
- 12 Cremer, M., & Ludwig, J. (1986). A Fast Simulation Model for Traffic Flow on the Basis of Boolean Operations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 28(4), 297-303.
- 13 Delgado, J., Saavedra, P., & Velasco, R. M. (2011). *Modelación de problemas de flujo vehicular*. México.

- 14 Donati, A. V., Montemanni, R., Casagrande, N., Rizzoli, A. E., & Gambardella, L. M. (2008). Time dependent vehicle routing problem with a multi ant colony system. *European Journal of Operational Research*, 185(3), 1174-1191.
- 15 Dorigo, M. (1992). Optimization, learning and natural algorithms. *Ph. D. Thesis*. Politecnico di Milano, Italy.
- 16 Florian, M., Mahut, M., & Tremblay, N. (2001). A hybrid optimization–mesoscopic simulation dynamic traffic assignment model. En *Proceedings of the 2001 IEEE Intelligent Transport Systems Conference* (págs. 118-123). Oakland, USA.
- 17 Foroughi, R., Montazer, A. G., & Sabzevari, R. (2008). Design of a new urban traffic control system using modified ant colony optimization approach. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction B- Engineering*, 32(B2), 167-173.
- 18 Fukui, M., & Ishibashi, Y. (1996). Traffic Flow in 1D Cellular Automaton Model Including Cars Moving with High Speed. *Journal of the Physical Society of Japan*, 65(6), 1868-1870.
- 19 Gerlough, D. L. (1957). Control of Automobile Traffic: A Problem in Real-time Computation. En *Papers and Discussions Presented at the December 9-13, 1957, Eastern Joint Computer Conference: Computers with Deadlines to Meet* (págs. 75-79). Washington, D.C., USA: ACM.
- 20 Gerlough, D. L. (1958). Applications of Computers to Traffic Problems. *Institute of Transportation and Traffic Engineering*.
- 21 Gipps, P. G. (1981). A behavioural car-following model for computer simulation. *Transportation Research Part B: Methodological*, 15(2), 105-111.
- 22 Gora, P. (2011). A Genetic Algorithm Approach to Optimization of Vehicular Traffic in Cities by Means of Configuring Traffic Lights. En D. Ryzko, H. Rybiński, P. Gawrysiak, & M. Kryszkiewicz (Edits.), *Emerging Intelligent Technologies in Industry* (Vol. 369, págs. 1-10). Springer Berlin Heidelberg.
- 23 Greenshields, B. D. (1934). The Photographic Method of Studying Traffic Behavior. En W. C. Roy (Ed.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the Highway Research Board* (Vol. 13, págs. 382-399). Washington, D.C., USA: Highway Research Board.
- 24 Greenshields, B. D. (1935). A Study of Traffic Capacity. En W. C. Roy (Ed.), *Proceedings of the 14th Annual Meeting of the Highway Research Board* (Vol. 14). Washington, D.C., USA: Highway Research Board.
- 25 Helbing, D. (1995). Improved fluid-dynamic model for vehicular traffic. *Physical Review E*, 51(4), 3164-3169.
- 26 Helbing, D. (2001). Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of Modern Physics*, 73(4), 1067-1141.

- 27 Helbing, D., & Treiber, M. (1998). Gas-Kinetic-Based Traffic Model Explaining Observed Hysteretic Phase Transition. *Physical Review Letters*, 81(14), 3042-3045.
- 28 Herman, R., & Potts, R. B. (1959). Single Lane Traffic Theory and Experiment. En *Proceedings of the Symposium on Theory of Traffic Flow* (págs. 147-157). New York, USA: Elsevier.
- 29 Herman, R., Montroll, E. W., Potts, R. B., & Rothery, R. W. (1959). Traffic Dynamics: Analysis of Stability in Car Following. *Operations Research*, 7(1), 86-106.
- 30 Hoar, R., Penner, J., & Jacob, C. (2002). Evolutionary swarm traffic: if ant roads had traffic lights. En *Proceedings of the Congress Evolutionary Computation* (Vol. 2, págs. 1910-1915). Washington, D.C., USA: IEEE Computer Society.
- 31 Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. The University of Michigan Press.
- 32 Hong, W.-C., Pai, P.-F., Yang, S.-L., & Lai, C.-Y. (2007). Continuous Ant Colony Optimization in a SVR Urban Traffic Forecasting Model. En F. Sandoval, A. Prieto, J. Cabestany, & M. Graña (Edits.), *Computational and Ambient Intelligence* (Vol. 4507, págs. 765-773). Springer Berlin Heidelberg.
- 33 Jayakrisham, R., Mahmassani, H. S., & Yu, T.-Y. (1994). An evaluation tool for advanced traffic information and management systems in urban networks. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2(3), 129-147.
- 34 Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995). Particle Swarm Optimization. En *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks* (Vol. 4, págs. 1942-1948). Washington, D.C., USA: IEEE Computer Society.
- 35 Klar, A., Kuhne, D., & Wegener, R. (1996). Mathematical Models for Vehicular Traffic. *Surveys on Mathematics for Industry*, 6(2), 215-239.
- 36 Knospe, W., Santen, L., Schadschneider, A., & Schreckenberg, M. (1999). Disorder effects in cellular automata for two-lane traffic. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 265(3-4), 614-633.
- 37 Knospe, W., Santen, L., Schadschneider, A., & Schreckenberg, M. (2002). A realistic two-lane traffic model for highway traffic. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(15), 3369-3388.
- 38 Kühne, R. (1984). Highway Capacity and Level of Service. En *Proceedings of the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*.
- 39 Kühne, R. (1987). Macroscopic freeway model for dense traffic stop-start waves and incident detection. En *Papers presented during the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory* (págs. 21-42). Delft, the Netherlands.

- 40 Leonard, D. P., Gower, P., & Taylor, N. (1989). *CONTRAM. Structure of the model*. Reporte 178, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, UK.
- 41 Lighthill, M. J., & Whitham, G. (1955). On kinetic waves: II) A theory of traffic Flow on long crowded roads. *Proceedings of the Royal Society of London, A*(229), 281-345.
- 42 Mahut, M. (2000). Discrete flow model for dynamic network loading. *Ph. D. Thesis*. Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal: Center for Research on Transportation, University of Montreal.
- 43 Mathur, M., Karale, S. B., Priye, S., Jayaraman, V. K., & Kulkarni, B. D. (2000). Ant Colony Approach to Continuous Function Optimization. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 39(10), 3814-3822.
- 44 MathWave. (Agosto de 2013). *EasyFit :: Product Specification*. Obtenido de http://www.mathwave.com/products/easyfit_desc.html
- 45 MathWave. (Agosto de 2013). *Mathwave data analysis & simulation*. Obtenido de <http://www.mathwave.com/en/home.html>
- 46 MathWave. (Agosto de 2013). *Supported Distributions*. Obtenido de http://www.mathwave.com/popup.html?topic=supp_dist&lang=en&w=490&product=easyfit
- 47 Nagel, K. (1996). Particle Hopping Models and Traffic Flow Theory. *Physical Review E*, 53(5), 4655-4672.
- 48 Nagel, K., & Schreckenberg, M. (1992). A cellular automaton model for freeway traffic. *Journal de Physique I*, 2(12), 2221-2230.
- 49 Nocedal, J., & Wright, S. (2000). *Numerical Optimization* (Primera ed.). Springer Berlin Heidelberg.
- 50 Paveri-Fontana, S. L. (1975). On Boltzmann-like treatments for traffic flow: A critical review of the basic model and an alternative proposal for dilute traffic analysis. *Transportation Research*, 9(4), 225-235.
- 51 Payne, H. J. (1979). FREFLO: a macroscopic simulation model of freeway traffic. *Transportation Research Record*, 72, 68-77.
- 52 Payne, H. J. (1979). *Research directions in computer control of urban traffic systems*. (W. S. Levine, E. Lieberman, & J. J. Fearnside, Edits.) New York, USA: American Society of Civil Engineers.
- 53 Pierre, D. A. (1986). *Optimization Theory with Applications*. New York, USA: Dover Publications, Inc.
- 54 Pipes, L. A. (1953). An Operational Analysis of Traffic Dynamics. *Journal of Applied Physics*, 24(3), 274-281.

- 55 Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (1992). *Numerical Recipes in C (2Nd Ed.): The Art of Scientific Computing* (Segunda ed.). New York, USA: Cambridge University Press.
- 56 Prigogine, I., & Andrews, F. C. (1961). A Boltzmann-Like Approach for Traffic Flow. *Operations Research*, 8(6), 789-797.
- 57 Prigogine, I., & Herman, R. (1971). *Kinetic Theory of Vehicular Traffic* (Primera ed.). New York, USA: Elsevier Publishing Company, Incorporated.
- 58 Rosini, M. D. (2013). *Macroscopic Models for Vehicular Flows and Crowd Dynamics: Theory and Applications* (Primera ed.). Springer Berlin Heidelberg.
- 59 Rothery, R. W. (1992). Chapter 4. Car following models. En *Transportation Research Board Special Report 165, "Traffic flow theory"* (págs. 64-103).
- 60 Scales, L. E. (1985). *Introduction to Non-Linear Optimization* (Primera ed.). MacMillan, City & Guilds.
- 61 Schreckenberg, M., Barvolic, R., Esser, J., Froese, K., Knospe, W., Neubert, L., y otros. (1999). Online Traffic Simulation with Cellular Automata. En W. Brilon, F. Huber, M. Schreckenberg, & H. Wallentowitz (Edits.), *Traffic and Mobility* (págs. 117-134). Springer Berlin Heidelberg.
- 62 Shi, Y., & Eberhart, R. (1998). A modified particle swarm optimizer. En *Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation* (págs. 69-73).
- 63 Small, K. A., Winston, C., & Evans, C. A. (1989). *Road work: a new highway pricing and investment policy*. Washington, D.C., USA: Brookings Institution Press.
- 64 Srinivasan, D., Loo, W. H., & Cheu, R. L. (2003). Traffic incident detection using particle swarm optimization. En *Proceedings of the 2003 IEEE Swarm Intelligence Symposium* (págs. 144-151).
- 65 Treiber, M., & Kesting, A. (2013). *Traffic Flow Dynamics Data, Models and Simulation*. (M. Treiber, & C. Thiemann, Trads.) Springer Berlin Heidelberg.
- 66 Velasco, R. M., & Marques, W. (2005). Navier-Stokes-like equations for traffic flow. *Physical Review E*, 72(4), 046102.
- 67 Wagner, P., Nagel, K., & Wolf, D. E. (1997). Realistic multi-lane traffic rules for cellular automata. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 234(3-4), 687-698.
- 68 Zang, L., Jia, L., & Meng, X. (2009). An Optimization Control Algorithm of Traffic Signals for Urban Arterials. En *IITA International Conference on Control, Automation and Systems Engineering* (págs. 338-341). IEEE Computer Society.

- 69 Zhao, J., Tang, D., Geng, X., & Jia, L. (2010). Urban Arterial Traffic Coordination Control System. En F. Wang, H. Deng, Y. Gao, & J. Lei (Edits.), *Artificial Intelligence and Computational Intelligence* (Vol. 6320, págs. 275-283). Springer Berlin Heidelberg.