



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN COMPUTACIÓN

**Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado:
teoría y aplicaciones**

TESIS

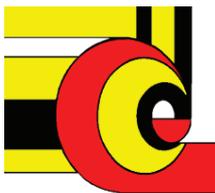
**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

PRESENTA:

NOÉ DANIEL CARBAJAL NÚÑEZ

DIRECTORES DE TESIS:

**DR. CORNELIO YÁÑEZ MÁRQUEZ
DR. MARÍA ELENA ACEVEDO MOSQUEDA**



MÉXICO, D.F.

DICIEMBRE DE 2012



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 11:00 horas del día 23 del mes de octubre de 2012 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

Centro de Investigación en Computación

para examinar la tesis titulada:

“Modelo bidireccional asociativo Alfa-Beta simplificado: teoría y aplicaciones”

Presentada por el alumno:

CARBAJAL

Apellido paterno

NÚÑEZ

Apellido materno

NOÉ DANIEL

Nombre(s)

Con registro:

B	1	0	1	6	3	9
---	---	---	---	---	---	---

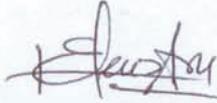
aspirante de: **MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

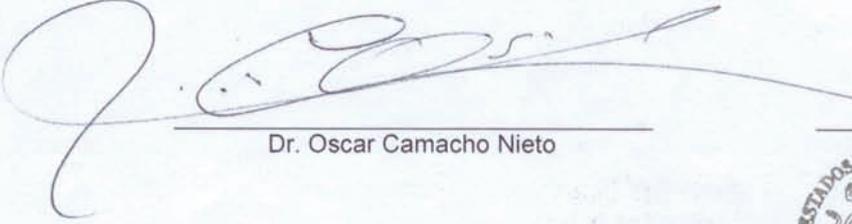
Directores de Tesis


Dr. Cornelio Yañez Márquez


Dra. María Elena Acevedo Mosqueda


Dr. Sergio Suárez Guerra


Dr. Miguel Jesús Torres Ruiz


Dr. Oscar Camacho Nieto


Dr. Amadeo José Argüelles Cruz

PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES


INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN

EN COMPUTACIÓN

DIRECCIÓN



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 15 del mes noviembre del año 2012, el (la) que suscribe Noé Daniel Carbajal Núñez alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias de la Computación con número de registro B101639, adscrito a Centro de Investigación en Computación, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Dr. Cornelio Yáñez Márquez y Dr. María Elena Acevedo Mosqueda y cede los derechos del trabajo intitulado "Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado: teoría y aplicaciones", al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección ncarbajalb10@sagitario.cic.ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Noé Daniel Carbajal Núñez

Nombre y firma

Resumen

Este trabajo presenta modificaciones de un modelo de memoria asociativa bidireccional (*Bidirectional Associative Memory, BAM*) conocido como alfa-beta. Tales modificaciones se han denominado aquí como modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

Debido a su origen, el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado no requiere de un proceso iterativo de convergencia, a diferencia de los modelos basados en la primera memoria asociativa bidireccional conocida en la literatura científica; por la misma causa, no tiene problemas de estabilidad.

El modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado reduce los pasos que realiza el algoritmo original bidireccional alfa-beta, obteniendo tiempos de procesamiento menores, así como, reducción en los requerimientos de almacenamiento. Concretamente, la complejidad en tiempo de este modelo simplificado es igual a $O(n^2)$.

El modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado utiliza modificaciones de otros modelos de memoria asociativa. Por esta razón, se describen trabajos involucrados con estas modificaciones dentro del contexto de las memorias asociativas y el desarrollo de las memorias bidireccionales en general.

Por las características del modelo propuesto (el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado), éste se puede utilizar como un clasificador de patrones.

Se incluyen los resultados experimentales obtenidos después de efectuar con bancos de datos específicos las fases de cada uno de los pasos que componen el modelo propuesto. Mostrando también, análisis comparativos con otros modelos.

Finalmente, son presentados posibles trabajos de investigación que pueden derivarse del modelo propuesto y sus aplicaciones, además de mostrar las conclusiones obtenidas después de analizar los resultados del modelo de memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificado.

Abstract

This paper presents changes of a model bidirectional associative memory (Bidirectional Associative Memory, BAM) known as alpha-beta. Such amendments are referred to here as model alpha-beta bidirectional associative simplified.

Take into account its origins, the simplified alpha-beta bidirectional associative model does not require an iterative process of convergence, unlike models based on the first report of bidirectional associative memory known in the scientific literature, for the same cause, has no stability problems.

The simplified alpha-beta bidirectional associative model reduces steps of the original algorithm bidirectional alpha-beta, obtaining lower processing times, as well as reduction in storage requirements. Specifically, the time complexity of this simplified model is equal to $O(n^2)$.

The simplified alpha-beta bidirectional associative model uses modifications of other models of associative memory. For this reason, researches involved with these modifications are described within the context of associative memories and the bidirectional memories development in general.

By the features of the proposed model (simplified alpha-beta bidirectional associative model), it can be used as a pattern classifier.

The experimental results obtained are included after performing the phases of each step of the proposed model with specific databases. Also, comparative analysis with others models are included.

Finally, possible research that could result from the proposed model and its applications are presented, and the conclusions drawn after analyzing the results of simplified alpha-beta bidirectional associative model.

Contenido

Resumen	I
Abstract.....	III
Índice de Figuras	VII
Índice de Tablas.....	IX
Glosario	X
CAPÍTULO 1	1
Introducción.....	1
1.1 Antecedentes.....	1
1.2 Justificación.....	2
1.3 Objetivo	3
1.4 Objetivos específicos.....	3
1.5 Organización del documento	3
CAPÍTULO 2	5
Estado del Arte	5
2.1 Conceptos básicos	5
2.1.1 Conceptos básicos de memorias asociativas	7
2.2 Memorias asociativas clásicas.....	9
2.2.1 Primera memoria asociativa: <i>lernmatrix</i>	10
2.2.2 Dispositivo óptico asociativo <i>correlograph</i>	10
2.2.3 El modelo genérico <i>linear associator</i>	11
2.2.4 Red neuronal o memoria asociativa Hopfield	12
2.3 Memorias asociativas morfológicas	13
2.4 Memorias asociativas alfa-beta	15
2.5 Primera memoria asociativa bidireccional	16
2.6 Evolución de las memorias asociativas bidireccionales	18
CAPÍTULO 3	25
Materiales y Métodos	25
3.1 Operadores binarios alfa (α) y beta (β)	25
3.2 Operaciones matriciales α -max, α -min, β -max y β -min	26
3.3 Relaciones entre matrices y tipos de ruido	27
3.4 Modelos de memoria heteroasociativa y autoasociativa alfa-beta	28
3.4.1 Memoria heteroasociativa alfa-beta <i>max</i> (A_{max})	29
3.4.2 Memoria heteroasociativa alfa-beta <i>min</i> (A_{min})	30
3.4.3 Memoria autoasociativa alfa-beta <i>max</i> (A_{max})	32
3.4.4 Memoria autoasociativa alfa-beta <i>min</i> (A_{min}).....	33
3.5 Modelo de memoria asociativa bidireccional alfa-beta	34
CAPÍTULO 4	41
Modelo Propuesto.....	41
4.1 Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.....	41
4.1.1 Pasos 1 y 2: dirección que recupera y dado x^ω	41
4.1.2 Pasos 3 y 4: dirección que recupera x dado y^ω	43
4.1.3 Ejemplo ilustrativo	44
4.1.3.1 Fase de Aprendizaje.....	44
4.1.3.2 Fase de Reconocimiento	49

4.2	Modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.....	52
4.2.1	Pasos 1 y 2: dirección que recupera y dado x^ω	53
4.2.2	Pasos 3 y 4: dirección que recupera x dado y^ω	54
4.2.3	Ejemplo ilustrativo	55
4.2.3.1	Fase de Aprendizaje.....	55
4.2.3.2	Fase de Reconocimiento.....	58
4.3	Modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado	62
4.3.1	Ejemplo ilustrativo	62
4.3.1.1	Fase de Aprendizaje.....	62
4.3.1.2	Fase de Reconocimiento.....	67
4.4	El modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y el modelo alternativo como clasificadores de patrones	72
4.4.1	Ejemplo ilustrativo	72
4.4.1.1	Fase de Aprendizaje.....	73
4.4.1.2	Fase de Reconocimiento.....	75
4.5	Complejidad del algoritmo del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado	78
4.5.1	Complejidad en espacio.....	78
4.5.2	Complejidad en tiempo.....	79
CAPÍTULO 5		81
Resultados Obtenidos		81
5.1	Análisis comparativo con el modelo de memoria asociativa bidireccional alfa- beta y el modelo simplificado propuesto	81
5.2	Resultados experimentales	84
5.2.1	Primer experimento: identificador de huellas dactilares	86
5.2.2	Segundo experimento: identificador de caracteres griegos	90
5.2.3	Tercer experimento: identificador de imágenes arbitrarias	91
5.2.4	Comparación del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y el modelo alternativo como clasificadores de patrones.....	92
5.2.4.1	Banco de datos iris.....	96
5.2.4.2	Banco de datos tic-tac-toe endgame	98
CAPÍTULO 6		103
Conclusiones y Trabajo Futuro		103
6.1	Conclusiones.....	103
6.2	Trabajo futuro	103
Referencias		105
Anexo		113
a)	Complejidad en espacio de la memoria asociativa bidireccional alfa-beta	113
b)	Complejidad en tiempo de la memoria asociativa bidireccional alfa-beta	113

Índice de Figuras

Fig. 2.1.1	Esquema de un sistema de clasificación de patrones. <i>Representación que solamente considera la tarea de clasificar patrones en clases.</i>	5
Fig. 2.1.2	Esquema genérico de un sistema de reconocimiento de patrones. <i>Representación que considera todas las tareas de reconocimiento de patrones.</i>	6
Fig. 2.1.3	Etapas de un sistema de reconocimiento de patrones con aprendizaje supervisado para la tarea específica de recuperación. (a) <i>Fase de aprendizaje o entrenamiento del sistema.</i> (b) <i>Fase de reconocimiento u operación del sistema.</i>	6
Fig. 2.1.4	Etapas de una memoria asociativa. (a) <i>Fase de aprendizaje o entrenamiento de la memoria.</i> (b) <i>Fase de reconocimiento u operación de la memoria.</i>	7
Fig. 2.1.5	Etapas de una memoria asociativa bidireccional. (a) <i>Fase de aprendizaje o entrenamiento de la memoria.</i> (b) <i>Fase de reconocimiento u operación de la memoria.</i>	9
Fig. 3.5.1	Esquema de los pasos de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta.....	34
Fig. 3.5.2	Esquema del paso 1 y 2 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta....	35
Fig. 3.5.3	Esquema del paso 3 y 4 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta....	36
Fig. 3.5.4	Diagramas de flujo de las fases de los pasos 1 y 2 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta. (a) <i>Fase de aprendizaje.</i> (b) <i>Fase de reconocimiento.</i>	37
Fig. 3.5.5	Diagramas de flujo de las fases de los pasos 3 y 4 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta. (a) <i>Fase de aprendizaje.</i> (b) <i>Fase de reconocimiento.</i>	39
Fig. 4.1.1	Esquema del paso 1 y 2 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificada.	42
Fig. 4.1.2	Esquema del paso 3 y 4 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificada.	43
Fig. 4.2.1	Esquema del paso 1 y 2 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificada alternativa.....	54
Fig. 4.2.2	Esquema del paso 3 y 4 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificada alternativa.....	54
Fig. 5.1.1	Diagramas de flujo de las fases de los pasos 1 y 2 del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. (a) <i>Fase de aprendizaje.</i> (b) <i>Fase de reconocimiento.</i>	82
Fig. 5.1.2	Diagramas de flujo de las fases de los pasos 3 y 4 del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. (a) <i>Fase de aprendizaje.</i> (b) <i>Fase de reconocimiento.</i>	83
Fig. 5.2.1	Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del primer experimento, donde cada imagen es un patrón de entrada.	86
Fig. 5.2.2	Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del primer experimento, donde cada imagen es un patrón de salida.....	87
Fig. 5.2.3	Ejemplo 1 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar para recuperar la imagen correspondiente.	88
Fig. 5.2.4	Ejemplo 2 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar para recuperar la imagen correspondiente.	88
Fig. 5.2.5	Ejemplo 1 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar con ruido aditivo para recuperar la imagen correspondiente.....	89
Fig. 5.2.6	Ejemplo 2 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar con ruido aditivo para recuperar la imagen correspondiente.....	89
Fig. 5.2.7	Ejemplo 3 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar con ruido aditivo para recuperar la imagen correspondiente.....	90

Fig. 5.2.8	Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del segundo experimento, donde cada imagen es un patrón de entrada.	91
Fig. 5.2.9	Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del segundo experimento, donde cada imagen es un patrón de salida.	91
Fig. 5.2.10	Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del tercer experimento, donde cada imagen es un patrón de entrada.	92
Fig. 5.2.11	Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del segundo experimento, donde cada imagen es un patrón de salida.	92
Fig. 5.2.12	Ventana inicial del programa que obtiene el factor de olvido y el porcentaje del método <i>leave-one-out</i> utilizando un banco de datos para diferentes clasificadores de patrones.	93
Fig. 5.2.13	Menú principal de la ventana inicial, del programa que obtiene el factor de olvido utilizando un banco de datos para diferentes clasificadores de patrones.	94
Fig. 5.2.14	Opciones pertenecientes al menú principal de la ventana inicial, del programa que obtiene el factor de olvido utilizando un banco de datos para diferentes clasificadores de patrones.	95
Fig. 5.2.15	Ejemplo del resultado del programa que obtiene el factor de olvido utilizando un banco de datos para un clasificador de patrones específico.	95
Fig. 5.2.16	Opciones pertenecientes al enfoque basado en métricas, del programa que obtiene el factor de olvido utilizando un banco de datos para diferentes clasificadores de patrones.	96

Índice de Tablas

Tabla 2.4.1	Definición de la operación binaria $\alpha: V \times V \rightarrow W$	15
Tabla 2.4.2	Definición de la operación binaria $\beta: W \times V \rightarrow V$	15
Tabla 2.6.1	Trabajos acerca de las <i>BAM</i> durante los años 1988 y 1989.....	19
Tabla 2.6.2	Publicaciones referentes a las <i>BAM</i> en 1990 y 1991.....	20
Tabla 2.6.3	Trabajos sobre las <i>BAM</i> entre 1992 y 1993.....	20
Tabla 2.6.4	Trabajos acerca de las <i>BAM</i> durante el año 1994.....	21
Tabla 2.6.5	Publicaciones referentes a las <i>BAM</i> desde 1996 hasta 1999.....	21
Tabla 2.6.6	Trabajos sobre las <i>BAM</i> en el periodo 2000-2006.....	22
Tabla 2.6.7	Publicaciones acerca de las <i>BAM</i> durante 2007-2011.....	23
Tabla 3.1.1	Propiedades de la operación binaria α	25
Tabla 3.1.2	Propiedades de la operación binaria β	26
Tabla 3.1.3	Propiedades combinadas de las operaciones binarias α y β	26
Tabla 5.1.1	Tabla comparativa entre el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y el modelo original.....	84
Tabla 5.2.1	Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del factor de olvido y el banco de datos <i>iris</i>	97
Tabla 5.2.2	Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del porcentaje del método <i>leave-one-out</i> y el banco de datos <i>iris</i>	98
Tabla 5.2.3	Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del factor de olvido y el banco de datos <i>tic-tac-toe endgame</i>	99
Tabla 5.2.4	Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del porcentaje del método <i>leave-one-out</i> y el banco de datos <i>tic-tac-toe endgame</i>	100
Tabla 5.2.5	Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del porcentaje del método <i>ten-fold cross validation</i> y el banco de datos <i>tic-tac-toe endgame</i>	101

Glosario

- A* Matriz que representa una memoria asociativa.
- m* Constante que determina el número de filas de una matriz.
- n* Constante que determina el número de columnas de una matriz.
- x* Patrón de entrada, representado por una matriz de orden $m \times n$ con un valor de m o n igual a 1; que es precisamente un arreglo finito conocido como vector.
- y* Patrón de salida, representado por una matriz de orden $m \times n$ con un valor de m o n igual a 1; que es precisamente un arreglo finito conocido como vector.
- k* Número entero positivo k específico.
- p* Número total de asociaciones, mejor conocido como cardinalidad del conjunto fundamental.
- μ Superíndice que puede tomar valores de números enteros positivos desde 1 hasta p , usado para identificar un patrón que pertenece al conjunto fundamental.
- ω Superíndice que puede tomar valores de números enteros positivos desde 1 hasta p , usado para identificar un patrón que pertenece al conjunto fundamental durante la fase de recuperación u operación.
- r* Dimensión de los patrones de salida.
- s* Dimensión de los patrones de entrada.
- i* Subíndice que identifica cada componente de un patrón de salida o la fila de una matriz.
- j* Subíndice que identifica cada componente de un patrón de entrada o la columna de una matriz.
- \forall Cuantificador universal.
- \exists Cuantificador existencial.
- \in Relación de pertenencia que vincula un elemento con un conjunto.
- V* Conjunto cuyos elementos coinciden con los posibles valores de los componentes de un patrón de entrada o salida.
- W* Conjunto cuyos elementos coinciden con los posibles valores de los componentes de la matriz que representa una memoria asociativa.
- a* Componente o entrada de una de una matriz *A*.
- t* Superíndice que indica la transpuesta de una matriz o patrón determinado, variable que indica un valor en el tiempo.
- \mathbb{Z} Conjunto que está formado por la unión de los conjuntos que únicamente contienen los números naturales diferentes de cero, los negativos de estos números naturales y el cero.
- Δ Cambio de valor de un componente o entrada de una matriz.
- Δ_y Cambio de valor de un componente o entrada de una matriz, empleando un patrón de salida.
- Δ_x Cambio de valor de un componente o entrada de una matriz, empleando un patrón de entrada.
- E* Constante positiva y elegida con anterioridad, comúnmente con un valor igual a 1.
- u* Valor de umbral, subíndice que identifica cada componente de un patrón de salida o la fila de una matriz.

- h Subíndice que identifica la fila de una matriz.
- I Matriz identidad.
- τ Valor en el tiempo, tal que, el estado en este tiempo de una matriz, es igual a su estado en el tiempo $\tau+1$.
- B Matriz arbitraria.
- C Matriz arbitraria.
- D Matriz resultante.
- \mathbb{R} Conjunto de los números reales.
- q Constante que indica el número de filas o columnas de una matriz.
- b Componente o entrada de una de una matriz B .
- c Componente o entrada de una de una matriz C .
- d Componente o entrada de una de una matriz D .
- \tilde{n} Subíndice que identifica cada componente de un patrón de entrada, vector arbitrario, vector *one-hot*, vector *zero-hot* o la columna de una matriz.
- \mathbf{h} Vector *one-hot* o vector arbitrario.
- \mathbf{g} Vector donde el valor de cada componente es igual a 1.
- \mathbf{e} Vector resultado de la transformada de contracción vectorial donde el vector \mathbf{E} es el primer argumento.
- \mathbf{f} Vector resultado de la transformada de contracción vectorial donde el vector \mathbf{F} es el primer argumento.
- \mathbf{h} Vector *zero-hot* o vector negado de \mathbf{h} .
- \mathbf{g} Vector donde el valor de cada componente es igual a 0, o vector negado de \mathbf{g} .
- \mathbf{f} Vector negado de \mathbf{f} .
- \mathbf{l} Vector arbitrario.
- \mathbf{L} Vector resultado de la transformada vectorial de expansión cuyo primer argumento es el vector \mathbf{l} y como segundo argumento el vector arbitrario \mathbf{h} .
- ξ Superíndice que puede tomar valores de números enteros positivos desde 1 hasta p , usado para identificar un patrón que pertenece al conjunto fundamental.
- \mathbf{X} Vector resultado de la transformada vectorial de expansión cuyo primer argumento es el vector \mathbf{x} y como segundo argumento el vector *one-hot* \mathbf{h} .
- \mathbf{Y} Vector resultado de la transformada vectorial de expansión cuyo primer argumento es el vector \mathbf{y} y como segundo argumento el vector *one-hot* \mathbf{h} .
- \mathbf{E} Vector resultante de una operación donde existe como argumento, un vector resultado de la transformada vectorial de expansión.
- \mathbf{F} Vector resultante de una operación donde existe como argumento, un vector resultado de la transformada vectorial de expansión.
- \mathbf{X} Vector resultado de la transformada vectorial de expansión cuyo primer argumento es el vector \mathbf{x} y como segundo argumento el vector *zero-hot* \mathbf{h} .
- \mathbf{Y} Vector resultado de la transformada vectorial de expansión cuyo primer argumento es el vector \mathbf{y} y como segundo argumento el vector *zero-hot* \mathbf{h} .
- \times Operador que denota el producto cartesiano entre conjuntos, además de expresar el producto entre dos constantes que determinan el número de filas y columnas de una matriz A para indicar el número total de componentes a_{ij} .
- \vee Operador que obtiene el valor máximo de sus argumentos.
- \cdot Operador que denota el producto entre dos matrices.

- Σ Operador que indica la suma de múltiples sumandos.
- $+$ Operador que indica la suma de sus argumentos.
- $-$ Operador que indica la resta de sus argumentos.
- $>$ Mayor que
- $<$ Menor que
- $=$ Igualdad.
- \neq Desigualdad.
- \geq Mayor o igual que.
- \leq Menor o igual que.
- $:$ Tal que.
- $|$ Tal que.
- \wedge Operador que obtiene el valor mínimo de sus argumentos.
- \sqcup Operador que indica el producto máximo de dos matrices.
- \sqcap Operador que obtiene el producto mínimo de dos matrices.
- \boxtimes Operador que denota el producto máximo o el producto mínimo, de un vector columna y un vector fila.
- α Operador alfa que utiliza como argumentos elementos del conjunto $\{0, 1\}$ y cuyo valor resultante, determinado por la operación del mismo nombre (α), únicamente pertenece al conjunto $\{0, 1, 2\}$.
- β Operador beta cuyo primer argumento pertenece estrictamente al conjunto $\{0, 1, 2\}$ y el segundo al conjunto $\{0, 1\}$, tal que el valor resultante es determinado por la operación del mismo nombre (β).
- \sqcup_{α} Operador empleado en la operación matricial α -max.
- \sqcap_{α} Operador utilizado en la operación matricial α -min.
- \sqcup_{β} Operador empleado en la operación matricial β -max.
- \sqcap_{β} Operador utilizado en la operación matricial β -min.
- \boxplus_{α} Operador que reemplaza los operadores \sqcup_{α} y \sqcap_{α} , en las operaciones α -max y α -min respectivamente, cuando el primer argumento de estas operaciones es un vector columna y el segundo argumento es un vector fila.
- \neg Operador lógico de negación booleano.
- \wedge Operador lógico booleano AND.
- \rightarrow Operador lógico booleano que indica implicación.
- \leftrightarrow Operador lógico booleano que indica doble implicación.
- (\mathbf{x}, \mathbf{y}) Asociación de un patrón de salida \mathbf{x} y un patrón de salida \mathbf{y} .
- $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$ Asociación de un patrón de salida \mathbf{x}^k y un patrón de salida \mathbf{y}^k para un número entero positivo k específico.
- \mathbf{x}^{ω} Patrón de entrada en la etapa de recuperación u operación de la memoria asociativa que pertenece al conjunto fundamental.
- \mathbf{y}^{ω} Patrón de salida en la etapa de recuperación u operación de la memoria asociativa que pertenece al conjunto fundamental.
- y^{μ}_i i -ésimo componente de un patrón de salida \mathbf{y}^{μ} .
- x^{μ}_j j -ésimo componente de un patrón de entrada \mathbf{x}^{μ} .
- V^s Conjunto de todas las combinaciones posibles de s elementos que pertenecen al conjunto V .
- V^r Conjunto de todas las combinaciones posibles de r elementos que pertenecen al conjunto V .

- a_{ij} Componente de una matriz A de $m \times n$ que identifica su posición, concretamente en la i -ésima fila y la j -ésima columna.
- $V^s \times V^r$ Conjunto que contiene todos los pares ordenados (\mathbf{x}, \mathbf{y}) cuyo primer elemento pertenece al conjunto V^s y el segundo elemento pertenece al conjunto V^r .
- $\tilde{\mathbf{x}}^\omega$ Patrón de entrada alterado con ruido aditivo, sustractivo o combinado.
- $\tilde{\mathbf{y}}^\omega$ Patrón de salida alterado con ruido aditivo, sustractivo o combinado.
- \mathbb{Z}^+ Conjunto que únicamente contiene los números naturales diferentes de cero.
- $\log_2(s)$ Logaritmo base 2 de s .
- $\mathbf{x}(t)$ Estado de una matriz A en el tiempo t .
- b_{ij} Componente de una matriz B de $m \times n$ que identifica su posición, concretamente en la i -ésima fila y la j -ésima columna.
- c_{ij} Componente de una matriz C de $m \times n$ que identifica su posición, concretamente en la i -ésima fila y la j -ésima columna.
- d_{ij} Componente de una matriz D de $m \times n$ que identifica su posición, concretamente en la i -ésima fila y la j -ésima columna.
- \mathbb{R}^s Conjunto de todas las combinaciones posibles de s elementos que pertenecen al conjunto \mathbb{R} .
- \mathbb{R}^r Conjunto de todas las combinaciones posibles de r elementos que pertenecen al conjunto \mathbb{R} .
- A_{max} Matriz que representa una memoria asociativa alfa-beta y morfológica tipo *max*.
- A_{min} Matriz que representa una memoria asociativa alfa-beta y morfológica tipo *min*.
- $\alpha(x, y)$ Operación alfa cuyo primer argumento es x y el segundo argumento es y .
- $\beta(x, y)$ Operación beta cuyo primer argumento es x y el segundo argumento es y .
- \mathbf{h}^k k -ésimo vector *one-hot*.
- \mathbf{H}^k k -ésimo vector *zero-hot*.
- ϕ^+ Función que denota la transformada vectorial de expansión.
- ϕ^- Función que define la transformada vectorial de contracción.
- $\phi^+(\mathbf{l}, \mathbf{h})$ Transformada vectorial de expansión dimensional, dados dos vectores arbitrarios \mathbf{l} y \mathbf{h} como primer y segundo argumento respectivamente.
- $\phi^-(\mathbf{L}, p)$ Transformada vectorial de contracción dimensional, dado \mathbf{L} un vector arbitrario como primer argumento y p una constante como segundo argumento.
- $\min(2^s, 2^r)$ Operación que obtiene el mínimo de los argumentos 2^s y 2^r .
- \mathbf{X}^k k -ésimo vector resultado de la transformada vectorial de expansión dimensional cuyo primer argumento es el k -ésimo vector \mathbf{x}^k y como segundo argumento el k -ésimo vector *one-hot* \mathbf{h}^k .
- \mathbf{Y}^k k -ésimo vector resultado de la transformada vectorial de expansión dimensional cuyo primer argumento es el k -ésimo vector \mathbf{y}^k y como segundo argumento el k -ésimo vector *one-hot* \mathbf{h}^k .
- \mathbf{X}^k k -ésimo vector resultado de la transformada vectorial de expansión dimensional cuyo primer argumento es el k -ésimo vector \mathbf{x}^k y como segundo argumento el k -ésimo vector *zero-hot* \mathbf{H}^k .
- \mathbf{Y}^k k -ésimo vector resultado de la transformada vectorial de expansión dimensional cuyo primer argumento es el k -ésimo vector \mathbf{y}^k y como segundo

- argumento el k -ésimo vector *zero-hot* \mathbf{h}^k .
- A_y Matriz que contiene, en determinado orden, todos los componentes de los patrones de salida que pertenecen al conjunto fundamental.
 - A_x Matriz que contiene, en determinado orden, todos los componentes de los patrones de entrada que pertenecen al conjunto fundamental.
 - \mathbf{X}^ω Vector resultado de la transformada vectorial de expansión dimensional cuyo primer argumento es el vector \mathbf{x}^ω y como segundo argumento el vector \mathbf{g} .
 - \mathbf{Y}^ω Vector resultado de la transformada vectorial de expansión dimensional cuyo primer argumento es el vector \mathbf{y}^ω y como segundo argumento el vector \mathbf{g} .
 - \mathbf{X}^ω Vector resultado de la transformada vectorial de expansión cuyo primer argumento es el vector \mathbf{x}^ω y como segundo argumento el vector \mathbf{g} .
 - \mathbf{Y}^ω Vector resultado de la transformada vectorial de expansión cuyo primer argumento es el vector \mathbf{y}^ω y como segundo argumento el vector \mathbf{g} .

CAPÍTULO 1

Introducción

1.1 Antecedentes

El cerebro humano ha sido el tema principal de numerosos trabajos de investigación, los cuales muestran que este órgano es capaz de recibir información sensorial, para producir respuestas que controlan las funciones corporales. Tomando en consideración que el procesamiento de esta información es realizado por millones de células del sistema nervioso, denominadas neuronas, es importante estudiar su funcionamiento para poder replicarlo y obtener determinadas respuestas que genera el cerebro de forma natural.

Específicamente en el área de las ciencias de la computación, en 1943, Warren McCulloch y Walter Pitts proponen un modelo matemático que intenta simular el funcionamiento de una neurona biológica [1], el cual sirvió de infraestructura para importantes trabajos en el tema de las redes neuronales artificiales. Tal es el caso de Frank Rosenblatt, quien presentó en 1957 su modelo de red neuronal denominado *perceptron* [2], que utiliza la idea de aprendizaje de neuronas del psicólogo Donald Hebb, donde la persistente actividad de estas células provoca un incremento en su eficiencia y en el reforzamiento de sus conexiones [3].

En 1960, surge la primera red neuronal que es aplicada a un problema real, el modelo *adaline* [4], utilizado para eliminar ecos en las líneas telefónicas. Por este motivo, sus autores Bernard Widrow y Marcial Hoff diseñan *madaline* [5], conformado por una organización de redes *adaline* que forman grandes arquitecturas, con el objetivo de conseguir un mejor resultado.

Los relevantes trabajos de Stephen Grossberg relacionados con las redes neuronales [6, 7], son prueba del trabajo realizado durante la década de los sesenta. Sin embargo, la mayoría de las investigaciones realizadas en el área están basadas en el modelo del *perceptron* y desafortunadamente en 1969, Marvin Minsky y Seymour Papert evidencian las deficiencias de éste, en su libro *Perceptrons* [8]. Tal y como lo externa Laveen N. Kanal en 1992 [9], a partir de este suceso, se propició el desinterés en el tema dentro de la comunidad científica, aunado con la inadecuada tecnología que había en ese momento y las anticipadas promesas hechas por los autores para resolver problemas fuera del alcance de los procesos de aprendizaje utilizados.

Dentro de las múltiples funciones del cerebro, su habilidad de recordar o recuperar la información que recibe y procesa, es una tarea que también ha sido estudiada y modelada por los científicos de las ciencias de la computación. Concretamente, las memorias asociativas han imitado este comportamiento y son conocidas desde 1961, cuando Karl Steinbuch diseña el primer modelo denominado *lernmatrix* [10], el cual codifica la

información recibida en una matriz para su posterior recuperación, idea que fue profundizada en sus siguientes artículos [11, 12].

Surge en 1969 el *correlograph*, un dispositivo óptico que se comporta como una memoria asociativa, creado por los escoceses Willshaw, Buneman y Longuet-Higgins [13]. No obstante, el año de 1972 también se destaca por el nacimiento de tres importantes modelos de memoria asociativa; el primero es genéricamente conocido como *linear associator*, y emergió gracias a los trabajos realizados por el neurofisiólogo James A. Anderson [14] y el físico e ingeniero eléctrico Teuvo Kohonen [15], que independientemente obtuvieron el mismo resultado manejando conceptos diferentes. Los otros dos modelos se refieren al *associatron* [16] y las *self-organizing nets of threshold elements* [17] diseñados por Kaoru Nakano y Shun-Ichi Amari respectivamente.

1982 fue el año en que se publicó en la revista *Proceedings of the national academy of sciences* la red neuronal de Jhon J. Hopfield que actúa igual a una memoria asociativa [18]. El impacto tan grande de esta publicación fue un potenciador de nuevas investigaciones relacionadas con las redes neuronales, que no habían tenido actividad relevante durante trece años después de las afirmaciones de Minsky y Papert; por ejemplo, en 1985 Rumelhart, Hinton y Williams, redescubren un método de aprendizaje para el *perceptron* con múltiples capas, nombrado *backpropagation* [19], que anteriormente fue propuesto por Paul Werbos en 1974 [20], pero por el bajo interés en el área su idea fue desapercibida. Por otro lado, el trabajo de Hopfield se convirtió en la memoria asociativa más conocida por la comunidad científica, y sirvió de base para el desarrollo de la primera memoria asociativa bidireccional diseñada por Bart Kosko en 1988 [21], modelo que recuerda o recupera información a partir de la información recibida y permite realizar el mismo procedimiento inversamente, idealmente obtiene la información recibida a partir de la información que recuerda.

Actividades cotidianas describen el comportamiento de las memorias asociativas bidireccionales, por ejemplo, cuando las personas aprenden una canción, escuchan el título de esa canción y recuerdan su letra, o escuchan un fragmento de la canción y recuerdan su título. El presente trabajo de tesis se enfoca en simular este funcionamiento, tomando como base los *modelos asociativos basados en relaciones de orden y operaciones binarias* [22], especialmente, las *memorias asociativas bidireccionales alfa-beta* [23], dadas a conocer en 2007 por los investigadores mexicanos Cornelio Yáñez y María E. Acevedo.

1.2 Justificación

La habilidad del ser humano de reconocer las señales externas del entorno es el tema principal en el que se ocupa el campo de reconocimiento de patrones [24], el cual utiliza y representa tales señales por medio de arreglos finitos de datos conocidos como patrones o vectores. Para la manipulación de esos datos, el reconocimiento de patrones posee una amplia variedad de conceptos, tareas específicas y diferentes enfoques [24-28], y precisamente las memorias asociativas representan a uno de ellos, comúnmente conocido como enfoque asociativo.

La información recuperada por las memorias asociativas no siempre es correcta, y sólo unos cuantos modelos garantizan la obtención de la información aprendida [22, 23] [29, 30] [43], además, algunos de los procedimientos utilizados para codificar la información en la memoria son exhaustivos. Por esta razón, la innovación de trabajos que han subsanado estas deficiencias genera alternativas de diseño e implementación para la solución de determinados problemas.

Las memorias asociativas *adam* [31] y *sdm* [32], son algunos ejemplos de memorias asociativas que han surgido tomando como base trabajos previos, pero siguen presentando debilidades en cuanto a recuperación. Sin embargo, la eficiencia de la memoria asociativa bidireccional alfa-beta para la recuperación de patrones aprendidos y las novedosas aplicaciones en las que se ha utilizado [33-35], justifican el estudio de su estructura con el propósito de diseñar e implementar nuevos modelos teóricos que generen opciones de codificación, aplicación y que conserven en lo posible sus características principales: utilizar un algoritmo no iterativo y recordar en su totalidad la información aprendida. Y de esta manera continuar con el desarrollo de memorias bidireccionales realizado hasta ahora [36-87].

1.3 Objetivo

Realizar modificaciones al modelo original de memoria asociativa bidireccional alfa-beta, que permitan la reducción del tiempo de procesamiento, así como de los requerimientos de espacio, sin eliminar la cualidad del modelo original de no ser iterativo.

1.4 Objetivos específicos

- Realizar tres tipos de modificaciones al modelo de memoria asociativa bidireccional alfa-beta original (*BAM* alfa-beta), de tal modo que se reduzcan, en cada caso, los pasos que realiza el algoritmo original bidireccional alfa-beta.
- Obtener con estas modificaciones tiempos de procesamiento menores, así como, reducción en los requerimientos de almacenamiento.
- Conservar la cualidad del modelo original bidireccional alfa-beta de no ser iterativo.

1.5 Organización del documento

El presente capítulo describe de manera concisa los hechos que anteceden esta obra, además de justificar, definir el objetivo general y los objetivos específicos del trabajo contenido en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo se presentan los conceptos básicos necesarios para un mayor entendimiento de los temas posteriores contenidos en esta tesis, la síntesis de los trabajos más relevantes dentro del contexto de las memorias asociativas y el desarrollo de las memorias bidireccionales en general.

El tercer capítulo describe las operaciones y modelos de las memorias autoasociativas y heteroasociativas alfa-beta, cuyas propiedades —también presentadas— son herramientas matemáticas de la propuesta del cuarto capítulo, el cual parte del modelo de *BAM* alfa-beta incluido al final de este tercer capítulo junto con sus características principales.

El cuarto capítulo describe la propuesta de este trabajo de tesis, estableciendo primeramente los pasos que la componen e ilustrando éstos con ejemplos. Además de presentar la complejidad en tiempo y espacio de esta idea y que ha sido denominada modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

El quinto capítulo presenta los resultados experimentales obtenidos después de efectuar con bancos de datos específicos las fases de cada uno de los pasos que componen el modelo propuesto en el cuarto capítulo. Mostrando también, análisis comparativos con otros modelos referidos en esta tesis.

En el sexto capítulo se muestran las conclusiones obtenidas después de analizar los resultados del modelo de memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificado, motivo central de este trabajo de tesis. Además, se presentan posibles trabajos de investigación que pueden derivarse del modelo propuesto y sus aplicaciones.

CAPÍTULO 2

Estado del Arte

En este capítulo se presentan los conceptos básicos necesarios para un mayor entendimiento de los temas posteriores contenidos en esta tesis, la síntesis de los trabajos más relevantes dentro del contexto de las memorias asociativas y el desarrollo de las memorias bidireccionales en general.

2.1 Conceptos básicos

La puntualización de los conceptos básicos en los párrafos siguientes tiene como objetivo establecer el ámbito de una memoria asociativa, por esta razón, es importante comenzar con la dilucidación de la rama de las ciencias de la computación que estudia y desarrolla estos modelos de memoria asociativa: el reconocimiento de patrones.

Dentro de la literatura científica existen diversas definiciones de reconocimiento de patrones: “Acto de recibir datos en bruto y realizar una acción basada en la ‘categoría’ del patrón” [24], “Disciplina científica relativa a los métodos de descripción y clasificación de objetos” [25], etcétera. Sin embargo, en este trabajo de tesis, se prefiere referir a él como una rama interdisciplinaria que identifica objetos a partir de rasgos específicos — igualmente conocidos como características o atributos— representados mediante un vector o arreglo finito de datos denominado patrón.

El reconocimiento automático de patrones involucra al mismo tiempo el desarrollo de sistemas computacionales que esencialmente se ocupan de efectuar tareas determinadas de reconocimiento de patrones, dentro de las cuales, clasificación es la más conocida y donde se ha hecho la mayor parte de investigación conforme al progreso de las demás tareas. Por eso algunos autores consideran que la clasificación es la única tarea relacionada con esta rama interdisciplinaria; de hecho, un sistema de reconocimiento de patrones comúnmente se conceptualiza como lo presenta Laveen Kanal en su artículo “Patterns in pattern recognition” [26] e ilustrado en la siguiente figura.

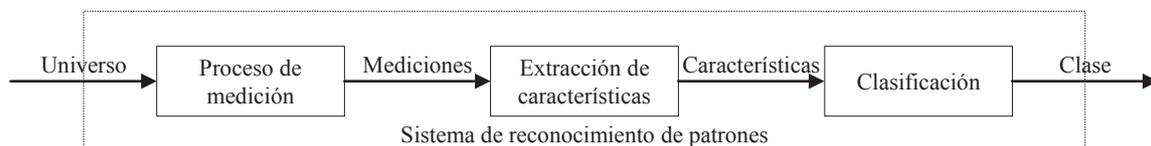


Fig. 2.1.1 Esquema de un sistema de clasificación de patrones. *Representación que solamente considera la tarea de clasificar patrones en clases.*

La recuperación, regresión y el agrupamiento son ejemplos de tareas de reconocimiento de patrones que pueden ser realizadas por un sistema igual al descrito al inicio del párrafo anterior [24]. Por ese motivo, se presenta a continuación el esquema general del sistema de

reconocimiento de patrones, que es una modificación respecto de la anterior figura y que intrínsecamente engloba todas las tareas.

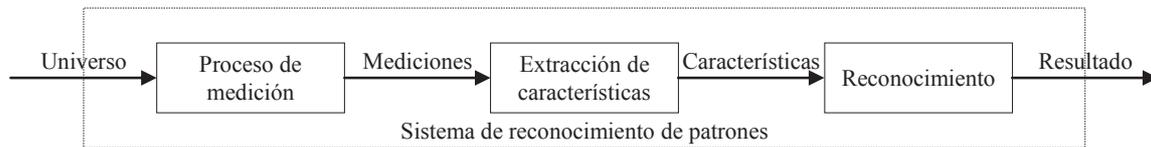


Fig. 2.1.2 Esquema genérico de un sistema de reconocimiento de patrones. *Representación que considera todas las tareas de reconocimiento de patrones.*

Para que el sistema de reconocimiento de patrones pueda producir un resultado, es necesario que el sistema aprenda, y una de las formas de hacerlo es mediante el aprendizaje supervisado [24], el cual parte de un conjunto de datos de entrenamiento que sirven para generar una función que obtenga los datos correspondientes de salida cuando se presentan datos futuros de un objeto de entrada. Específicamente, para el caso de la tarea de recuperación se utiliza un aprendizaje supervisado, donde los datos de entrenamiento sirven para crear una memoria asociativa, que es definida y detallada en la sección (2.1.1) incluida en este apartado.

La etapa previa de aprendizaje denominada también fase de entrenamiento, y la función de la memoria asociativa dentro de un sistema de reconocimiento de patrones en la etapa posterior de reconocimiento —además conocida como fase de operación— se ilustran en la figura consecutiva.

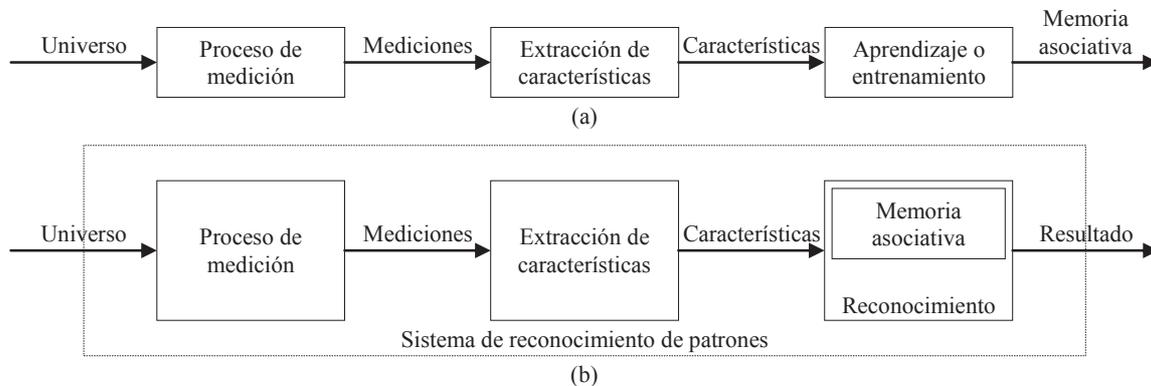


Fig. 2.1.3 Etapas de un sistema de reconocimiento de patrones con aprendizaje supervisado para la tarea específica de recuperación. (a) *Fase de aprendizaje o entrenamiento del sistema.* (b) *Fase de reconocimiento u operación del sistema.*

A partir de aquí, el diseño de memorias asociativas y los resultados que éstas generan son el tema central que atañe al resto de este documento, todo esto con el fin de contextualizar y explicar de la mejor manera el modelo de memoria asociativa bidireccional propuesto.

2.1.1 Conceptos básicos de memorias asociativas

En esta sección se muestra la representación, la simbología y las definiciones más importantes relacionadas con las memorias asociativas; información contenida en las referencias [22, 23] [27, 28].

Una memoria asociativa se puede conceptualizar como un sistema que relaciona parejas de patrones con la finalidad de recuperar patrones completos denominados patrones de salida a partir de patrones llamados patrones de entrada [27]. Regularmente, un patrón de entrada y uno de salida se simboliza con la letra minúscula remarcada \mathbf{x} y \mathbf{y} respectivamente, en tal forma que su correspondiente asociación queda representada como (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

Generalmente se maneja la teoría de conjuntos para representar la colección finita de asociaciones utilizadas para generar la memoria asociativa, conocido como conjunto fundamental, de entrenamiento o aprendizaje. Para distinguir cada asociación, se coloca un número entero positivo como superíndice a los patrones de entrada y salida, tal que, el patrón de entrada \mathbf{x}^1 le corresponda el patrón de salida \mathbf{y}^1 , y ambos formen la asociación $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$; igualmente, para un número entero positivo k específico, la asociación correspondiente sea $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

Considerando lo anterior, el conjunto fundamental se define como $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ y se interpreta como el conjunto de asociaciones $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$, tal que μ es un índice que puede tomar valores de números enteros positivos desde 1 hasta p , donde p significa el número total de asociaciones, mejor conocido como cardinalidad del conjunto fundamental.

La memoria asociativa creada es representada por medio de una matriz A , y en su etapa de operación se recupera un patrón de salida \mathbf{y} al presentarle un patrón de entrada \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, e idealmente cuando la memoria asociativa obtiene como respuesta su correspondiente patrón de salida \mathbf{y}^ω , entonces la recuperación es correcta, es decir, se recupera un patrón $\mathbf{y} = \mathbf{y}^\omega$. Esta etapa y la de entrenamiento se esquematizan a continuación.



Fig. 2.1.4 Etapas de una memoria asociativa. (a) *Fase de aprendizaje o entrenamiento de la memoria.* (b) *Fase de reconocimiento u operación de la memoria.*

Debido a que los patrones son vectores o arreglos finitos, es necesario establecer su dimensión, la cual se representa con los números enteros positivos r y s , donde el valor de r indica la dimensión de los patrones de salida, y el valor de s la dimensión de los patrones de entrada. A su vez, cada componente del patrón de salida es identificado con la ayuda del subíndice $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, talmente que el i -ésimo componente de un patrón de salida μ se indique con la misma letra del vector, pero sin marcado y colocando el subíndice i de la siguiente forma: y_i^μ . Similarmente para el patrón de entrada se utiliza el subíndice $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, y el j -ésimo componente de un patrón de entrada μ queda especificada como sigue: x_j^μ .

Con los conceptos anteriores, las memorias asociativas se pueden clasificar en dos tipos de acuerdo con la especie de conjunto fundamental que posea. Si $\forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ se cumple que $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu$ entonces la memoria asociativa resultante es autoasociativa, en caso contrario la memoria asociativa obtenida es heteroasociativa, es decir, $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ para el que se cumple que $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$ [28]. Cabe mencionar que una característica fundamental de las memorias autoasociativas es que r y s deben ser iguales, y para el caso de las memorias heteroasociativas el valor de estas constantes es indistinto.

Los valores de los componentes de los patrones de entrada y de salida están contenidos dentro un conjunto al que arbitrariamente se ha nombrado V . Consiguientemente, los valores de los componentes de la memoria asociativa A también se especifican en un conjunto llamado W .

Por convención y con apoyo del conjunto V , podemos definir que un patrón de entrada tiene s componentes cuyos valores pertenecen al conjunto V y un patrón de salida tiene r componentes cuyos valores pertenecen asimismo al conjunto V ; también expresado como $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$. Por lo tanto, cada asociación del conjunto fundamental pertenece al producto cartesiano de V^s y V^r , que es el conjunto $V^s \times V^r$ que contiene todos los pares ordenados (\mathbf{x}, \mathbf{y}) cuyo primer elemento pertenece al conjunto V^s y el segundo elemento pertenece al conjunto V^r .

Las dimensiones de la memoria asociativa A se definen por medio de las constantes m y n , las cuales se utilizan para especificar el número de filas y columnas de la matriz respectivamente. Adicionalmente, se destina la letra minúscula a para simbolizar una entrada o componente de la memoria, añadiendo subíndices i y j que indican que el componente se encuentra en la i -ésima fila y la j -ésima columna de la matriz de $m \times n$. Entonces, si consideramos que las entradas de la matriz pertenecen al conjunto W , podemos expresar que $\forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $a_{ij} \in W$.

Por lo anterior podemos observar que los conjuntos V y W no necesariamente tienen que ser iguales, porque los valores contenidos en la memoria asociativa dependen del método de codificación utilizado para almacenar la información para su futura recuperación.

La notación de matrices se emplea para la manipulación de vectores, debido a que si el valor de m o n de una matriz de orden $m \times n$ es igual a 1, entonces la matriz es precisamente un vector fila o vector columna. Se puntualiza entonces que, teniendo una matriz de tamaño $m \times n$, si el valor de $m = 1$ y $n > 1$ entonces la matriz es un vector fila, y cuando el valor de $m > 1$ y $n = 1$ entonces es un vector columna. En el caso de la matriz de dimensión 1×1 no es necesario especificarlo.

Uno de los principales retos de una memoria asociativa es recuperar patrones completos dado que en la entrada se presentan patrones alterados con ruido aditivo, sustractivo o combinado. La forma de simbolizar estos patrones alterados es colocarles una tilde, de modo que las representaciones de los patrones ruidosos de entrada y salida correspondientemente quedan: $\tilde{\mathbf{x}}^\omega$ y $\tilde{\mathbf{y}}^\omega$.

De acuerdo con la notación descrita, se requiere discernir entre los superíndices μ y t de un patrón, porque puede existir confusión al representar su transpuesta, la cual es denotada

adicionando precisamente el superíndice t al símbolo del vector. Para evitar tal confusión, especificamos las siguientes igualdades.

$$\mathbf{x}^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, \dots, x_j^\mu, \dots, x_s^\mu)^t = \begin{pmatrix} x_1^\mu \\ x_2^\mu \\ \vdots \\ x_j^\mu \\ \vdots \\ x_s^\mu \end{pmatrix} \in V^s, \quad \mathbf{y}^\mu = (y_1^\mu, y_2^\mu, \dots, y_i^\mu, \dots, y_r^\mu)^t = \begin{pmatrix} y_1^\mu \\ y_2^\mu \\ \vdots \\ y_i^\mu \\ \vdots \\ y_r^\mu \end{pmatrix} \in V^r \quad (2.1)$$

Sintetizando, la tarea de la fase de aprendizaje es encontrar los operadores adecuados y un modo de generar una matriz A que guarde las p asociaciones del conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1), (\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2), \dots, (\mathbf{x}^p, \mathbf{y}^p)\}$, tal que $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$. De modo que si $r = s$ y $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{y}^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, la memoria es autoasociativa; de lo contrario, si $\exists \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ donde $\mathbf{x}^\mu \neq \mathbf{y}^\mu$, la memoria es heteroasociativa.

De manera ideal, la labor de la fase de reconocimiento es hallar los operadores adecuados y las condiciones suficientes para obtener el patrón fundamental de salida \mathbf{y}^ω , cuando se opera la memoria A con el patrón fundamental de entrada \mathbf{x}^ω , lo anterior para todos los elementos del conjunto fundamental y para ambos modos: autoasociativo y heteroasociativo.

Adicionalmente, para una memoria asociativa bidireccional, mejor conocida como *BAM* por sus siglas en inglés *bidirectional associative memory*, se requiere, dado un patrón de salida \mathbf{y}^ω , encontrar un patrón de entrada \mathbf{x} que idealmente es igual a \mathbf{x}^ω . Esta fase de reconocimiento y la fase de aprendizaje de la *BAM* se representan en la sucesiva figura.



Fig. 2.1.5 Etapas de una memoria asociativa bidireccional. (a) Fase de aprendizaje o entrenamiento de la memoria. (b) Fase de reconocimiento u operación de la memoria.

2.2 Memorias asociativas clásicas

A continuación se describen las memorias asociativas clásicas fundamentales dentro del contexto de reconocimiento de patrones en general, y que fueron clave para el desarrollo de algunos modelos de memoria asociativa bidireccional importantes para este trabajo, como es el caso de la red neuronal Hopfield [18] y el *linear associator* [14, 15] que ayudaron en la concepción de la *BAM* de Kosko [21] y la *BAM alfa-beta* [23] respectivamente.

La descripción consta de la explicación concisa de la fase de aprendizaje y reconocimiento de cada trabajo, empleando la notación introducida en la sección anterior para efectos de consistencia en la escritura; por ende algunas expresiones son adaptadas con respecto a los trabajos originales [10] [13-15] [18].

2.2.1 Primera memoria asociativa: *lernmatrix*

La memoria asociativa *lernmatrix* de Karl Steinbuch [10] utiliza arreglos cuadrículados para la codificación de los patrones del conjunto fundamental, y si los patrones de salida cumplen condiciones específicas es posible que funcione como clasificador de patrones; esto quiere decir que la memoria es heteroasociativa, porque se pueden asociar patrones de entrada con sus respectivas clases como patrones de salida, y no necesariamente tienen que ser iguales tales patrones de entrada con los de salida.

Esta memoria trabaja con patrones finitos de entrada y salida binarios, es decir, que $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ donde $V = \{0, 1\}$ y $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$; cuya fase de aprendizaje y reconocimiento se concretan en los párrafos sucesivos.

Fase de aprendizaje.- Se genera una matriz A de orden $r \times s$ (esto significa que $m = r$ y $n = s$), con un valor inicial de cero en sus componentes $a_{ij} \forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, que son actualizados con cada una de las asociaciones del conjunto fundamental $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \in V^s \times V^r$ aplicando la regla $a_{ij} + \Delta a_{ij}$ donde Δa_{ij} se define como sigue.

$$\Delta a_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon & \text{si } y_i^\mu = 1 = x_j^\mu \\ -\varepsilon & \text{si } y_i^\mu = 1 \text{ y } x_j^\mu = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.2)$$

Siendo ε una constante positiva elegida con anterioridad, comúnmente con valor igual a 1.

Fase de reconocimiento.- Se obtiene un patrón de salida $\mathbf{y} \in V^r$, donde el i -ésimo componente de este patrón se logra de acuerdo con la expresión siguiente, siendo V el operador que obtiene el valor máximo de una serie de valores.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^s (a_{ij} \cdot x_j^\omega) = \bigvee_{h=1}^r \left[\sum_{j=1}^s (a_{hj} \cdot x_j^\omega) \right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.3)$$

Si en la fase de aprendizaje los patrones son codificados de manera que se asignen a los componentes de cada vector de salida \mathbf{y}^μ los siguientes valores: $y_k^\mu = 1$ y $y_i^\mu = 0$ para $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, r$ y $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ que simboliza el número de clase al que pertenece el correspondiente patrón \mathbf{x}^μ . Entonces en la fase de reconocimiento idealmente se consigue un patrón \mathbf{y}^ω que tiene un componente y_k^ω igual a 1 y donde este valor de k indica el número de clase al que pertenece el respectivo patrón de entrada \mathbf{x}^ω .

2.2.2 Dispositivo óptico asociativo *correlograph*

La memoria asociativa nombrada *correlograph* por sus autores Willshaw, Buneman y Longuet-Higgins [13], es un dispositivo óptico que inicialmente fue fabricado con tres placas y una fuente de luz, e igualmente que la *lernmatrix* los patrones del conjunto fundamental son codificados en un arreglo cuadrículado o matriz.

Con respecto a las especificaciones del *correlograph*, se sabe que $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ donde $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$ y el conjunto $V = \{0, 1\}$, por lo tanto, se pueden precisar las fases de esta memoria asociativa de la siguiente manera.

Fase de aprendizaje.- Se crea una matriz A con un valor de $m = r$ filas y $n = s$ columnas, es decir de dimensión $r \times s$, donde cada componente a_{ij} inicialmente tiene valor igual a cero $\forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, s\}$, y después tales componentes se modifican de acuerdo con la expresión que sigue $\forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } y_i^\mu = 1 = x_j^\mu \\ \text{valor anterior} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.4)$$

Fase de reconocimiento.- Se consigue el patrón de salida $\mathbf{y} \in V^r$ a partir de los valores y_i obtenidos aplicando la expresión siguiente $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^s (a_{ij} \cdot x_j^\omega) \geq u \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.5)$$

Siendo el valor de umbral u igual a $\log_2(s)$; determinado por los creadores de este modelo de memoria asociativa.

2.2.3 El modelo genérico *linear associator*

Linear associator es el nombre genérico destinado a este modelo de memoria asociativa, debido a que la idea de su funcionamiento, fue propuesta en el mismo año por dos trabajos mutuamente independientes, uno de ellos desarrollado por el estadounidense James A. Anderson [14] y el otro por el finlandés Teuvo Kohonen [15].

Para describir las fases de esta memoria, se establece que $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ donde $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$ y $V = \{0, 1\}$.

Fase de aprendizaje.- Se crean p matrices que recíprocamente correspondan con cada una de las asociaciones del conjunto fundamental, de forma que $\forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ se obtenga una matriz de dimensión $r \times s$ igual a el producto $\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$. Posteriormente, tales matrices se suman para generar una matriz del mismo orden: la memoria asociativa A con $m = r$ filas y $n = s$ columnas, definida a continuación.

$$A = \sum_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t] = [a_{ij}]_{r \times s} \text{ donde } a_{ij} = \sum_{\mu=1}^p (y_i^\mu \cdot x_j^\mu) \quad (2.6)$$

Fase de reconocimiento.- Con el patrón de entrada $\mathbf{x}^\omega \in V^s$ se realiza la operación $A \cdot \mathbf{x}^\omega$ para conseguir el patrón de salida $\mathbf{y} \in V^r$, donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$.

2.2.4 Red neuronal o memoria asociativa Hopfield

Después de la publicación en 1982 del trabajo de Jhon J. Hopfield [18], las redes neuronales fueron explotadas en cuanto a su desarrollo y aplicación, y aún cuando las memorias asociativas continuaron evolucionando, las redes neuronales tuvieron mayor fama. Por esa razón, la red neuronal de Hopfield es también una de las memorias asociativas más conocidas, aunque tenga un bajo rendimiento si de recuperar patrones aprendidos se trata.

En relación con las s neuronas de la red Hopfield, cada una de estas es representada en cada componente de un patrón específico de dimensión s , donde los dos estados posibles de dichas neuronas corresponden con los valores 0 y 1, pero de acuerdo con el artículo de Hopfield se puede incrementar el almacenamiento de información en la red si los valores correspondientes son -1 y 1 . Además se considera que cada una de las s neuronas tiene una fuerza de conexión con cada una de las $s-1$ restantes, de modo que el valor de la conexión entre la neurona i y la neurona j está dado por $a_{ij} \forall i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ tal que $i \neq j$; y debido a que no existen conexiones recurrentes de una neurona así misma, el valor de $a_{ii} = 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$, por lo tanto el valor de dos neuronas que no están conectadas también es igual a 0.

Como los valores de las conexiones a_{ij} corresponden con las entradas de la matriz A o memoria asociativa de Hopfield, en el que $a_{ii} = 0$ y $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$, entonces podemos decir que la matriz es simétrica y con ceros en la diagonal principal. Asimismo, la memoria es autoasociativa ya que la fuerza de conexión de las neuronas se determina con el conjunto fundamental definido como $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \in V^s \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ donde $V = \{-1, 1\}$ y $p, s \in \mathbb{Z}^+$.

Fase de aprendizaje.- Inicialmente, se obtienen p matrices de dimensión $s \times s$ al realizar $\forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ la operación $\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - I$, siendo I la matriz identidad de orden $s \times s$ que tiene valor 1 en cada una de las entradas de la diagonal principal. Posteriormente, tales matrices se suman para generar la matriz A con $m = s$ filas y $n = s$ columnas, precisada a continuación.

$$A = \sum_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t - I] = [a_{ij}]_{s \times s} \text{ donde } a_{ij} = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^p (x_i^\mu \cdot x_j^\mu) & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.7)$$

Fase de reconocimiento.- Con un patrón $\mathbf{x}^\omega \in V^s$ como entrada, donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, la memoria asociativa A comienza a operar cambiando su estado durante el tiempo hasta que un estado en el tiempo t sea igual al estado anterior $t-1$, de manera que un patrón de dimensión s en el tiempo t representa precisamente el estado de A en ese tiempo y es denotado como $\mathbf{x}(t)$; del mismo modo, el estado de la memoria A en el tiempo $t+1$ se indica como $\mathbf{x}(t+1)$. Con respecto al valor de la i -ésima neurona en el tiempo t perteneciente al patrón $\mathbf{x}(t)$, se expresa como $x_i(t)$.

El resumen de la fase de reconocimiento descrita en el párrafo anterior se detalla en los siguientes enunciados.

Primeramente, para el tiempo $t = 0$ se hace $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^\omega$ de modo que $\forall i \in \{1, 2, \dots, s\} x_i(t) = x_i^\omega(t)$, y después se calcula el vector $\mathbf{x}(t+1)$, donde cada uno de sus componentes se obtiene de acuerdo con la regla siguiente.

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^s [a_{ij} \cdot x_j(t)] > 0 \\ x_i(t) & \text{si } \sum_{j=1}^s [a_{ij} \cdot x_j(t)] = 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{j=1}^s [a_{ij} \cdot x_j(t)] < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Si $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t)$ entonces el vector recuperado es $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^\omega$ y el proceso termina. En caso contrario se hace $t = t+1$ y se calcula el vector $\mathbf{x}(t+1)$ usando la expresión (2.8), repitiendo este procedimiento tantas veces hasta llegar a un valor $t = \tau$ para el cual $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t)$ tal que $x_i(t+1) = x_i(t) \forall i \in \{1, 2, \dots, s\}$, entonces el proceso finaliza y el patrón recuperado es igual a $\mathbf{x}(t)$.

2.3 Memorias asociativas morfológicas

Las memorias asociativas morfológicas surgen durante la década de los noventa y su importancia en este trabajo de tesis radica en sus propiedades, que se distinguen de los modelos matemáticos presentados en la sección anterior al utilizar el máximo (o mínimo) valor de las sumas en lugar de la suma de los productos [29, 30]; aparte de ser las memorias precursoras de los modelos asociativos alfa-beta.

Los investigadores Gerhard X. Ritter, Peter Sussner y Juan L. Díaz de León, creadores de las memorias asociativas morfológicas, utilizan los operadores binarios $+$, \vee y \wedge en su diseño para definir dos operaciones matriciales manejadas en la fase de aprendizaje y reconocimiento de estas memorias, donde los símbolos \vee y \wedge denotan las operaciones que obtienen el valor máximo y mínimo de sus argumentos respectivamente.

La primera definición matricial establece, dadas dos matrices arbitrarias B y C de orden $r \times q$ y $q \times s$ correspondientemente cuyos componentes pertenecen al conjunto de los números reales \mathbb{R} y $q, r, s \in \mathbb{Z}^+$, el producto máximo de B y C representado como $B \sqcup C$ da como resultado una matriz D de orden $r \times s$ de modo que sus componentes se determinan mediante la expresión (2.9), siendo b_{ik} , c_{kj} y d_{ij} los componentes de B , C y D respectivamente $\forall i, j, k$ tal que $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ y $k \in \{1, 2, \dots, q\}$.

$$d_{ij} = \bigvee_{k=1}^q (b_{ik} + c_{kj}) \quad (2.9)$$

Tomando en cuenta las especificaciones de las matrices B y C del párrafo anterior, la segunda definición matricial establece que el producto mínimo de B y C representado como $B \sqcap C$ da como resultado una matriz D de dimensión $r \times s$ de manera que sus componentes se

obtienen de acuerdo con la expresión (2.10), siendo b_{ik} , c_{kj} y d_{ij} los componentes de B , C y D respectivamente $\forall i, j, k$ tal que $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ y $k \in \{1, 2, \dots, q\}$.

$$d_{ij} = \bigwedge_{k=1}^q (b_{ik} + c_{kj}) \quad (2.10)$$

Un caso particular de las dos definiciones previas surge cuando el valor de q es igual a 1, en ese caso el producto máximo y mínimo de B y C es el mismo; en consecuencia, exclusivamente para este caso el producto máximo y mínimo se puede denotar como $B \boxtimes C$.

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) representan las operaciones básicas de dilatación y erosión que forman la base de la morfología matemática, empleada principalmente en el análisis y tratamiento de estructuras geométricas en imágenes binarias; por este motivo las memorias asociativas descritas en esta sección son denominadas morfológicas.

Como la suma de matrices se reemplaza por las operaciones máximo o mínimo en el esquema de estas memorias morfológicas, es necesario comentar que para dos matrices arbitrarias B y C de las mismas dimensiones, la i, j -ésima entrada de la matriz $D = BVC$ está dada por $d_{ij} = b_{ij} \vee c_{ij}$, donde el índice i representa el número de fila y el índice j el número de columna. Similarmente, el mínimo de dos matrices $D = B \wedge C$ está definido por $d_{ij} = b_{ij} \wedge c_{ij}$.

Una vez definidas los conceptos anteriores, se pueden describir las fases de aprendizaje y reconocimiento de las memorias asociativas morfológicas, en las cuales se fija un conjunto fundamental igual a $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \in \mathbb{R}^s$, $\mathbf{y}^\mu \in \mathbb{R}^r$ donde $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$.

Fase de aprendizaje.- Se genera la memoria asociativa morfológica, la cual puede ser uno de los dos posibles tipos, uno de ellos denominado *max* denotado como A_{max} y el otro *min* denotado como A_{min} , definidos en las expresiones (2.11) y (2.12). Por lo tanto, cualquier tipo de memoria resultante es una matriz de dimensión $r \times s$, es decir, que $r = m$ y $s = n$.

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \boxtimes (\mathbf{x}^\mu)^t] \quad (2.11)$$

$$A_{min} = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \boxtimes (\mathbf{x}^\mu)^t] \quad (2.12)$$

Fase de reconocimiento.- Para obtener el patrón de salida $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^r$ y dependiendo del tipo de memoria asociativa morfológica, se aplica la operación máximo o mínimo de la memoria y el patrón de entrada $\mathbf{x}^\omega \in \mathbb{R}^s$ en el que $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si la memoria asociativa morfológica es *max* entonces $\mathbf{y} = A_{max} \sqcap \mathbf{x}^\omega$; por otro lado, cuando la memoria asociativa morfológica es *min* entonces $\mathbf{y} = A_{min} \sqcup \mathbf{x}^\omega$.

2.4 Memorias asociativas alfa-beta

Las memorias asociativas alfa-beta también comparten con las memorias asociativas morfológicas, la característica de utilizar en su fase de aprendizaje y de reconocimiento los operadores \vee y \wedge , pero se distinguen por la inclusión de dos operaciones binarias identificadas por las dos primeras letras del alfabeto griego α y β .

Para la memoria asociativa alfa-beta, la operación α es pieza importante en su etapa de aprendizaje, ya que el valor de las entradas de la matriz resultante A se determinan mediante esta operación; por su parte, en su etapa de reconocimiento la operación β es primordial, porque por medio de ella se establece el valor de las entradas del patrón de salida y . Entonces, si se considera que los valores de los componentes de los vectores de entrada y salida pertenecen a un único conjunto, se puede decir que el conjunto de los posibles resultados de las operaciones α y β definen los conjuntos V y W —mencionados en la sección (2.1.1) del presente capítulo—, utilizados para especificar los valores de los componentes de los patrones del conjunto fundamental y las entradas de la memoria asociativa alfa-beta respectivamente.

Además, es necesario indicar que los valores de ambos argumentos de la operación α pertenecen al conjunto $V = \{0, 1\}$, y para el caso de la operación β , estrictamente el valor del primer argumento pertenece al conjunto $W = \{0, 1, 2\}$ y el segundo, al igual que la operación α , pertenece al conjunto V . Con estas especificaciones establecidas, se presenta a continuación la definición de las dos operaciones α y β .

x	y	$\alpha(x, y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	2
1	1	1

Tabla 2.4.1 Definición de la operación binaria $\alpha: V \times V \rightarrow W$.

x	y	$\beta(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1
2	0	1
2	1	1

Tabla 2.4.2 Definición de la operación binaria $\beta: W \times V \rightarrow V$.

Este modelo de memoria asociativa creado por Cornelio Yáñez [22], es explicado con mayor detalle en el capítulo siguiente, porque se presenta la teoría empleada en el diseño de la memoria asociativa bidireccional alfa-beta y de la propuesta de este trabajo de tesis.

2.5 Primera memoria asociativa bidireccional

El resto de este capítulo se enfoca exclusivamente en las memorias asociativas bidireccionales, y esta sección en especial es destinada a la descripción de la primera memoria asociativa bidireccional, diseñada por Bart Kosko [21].

Primeramente, es importante puntualizar que esta primera memoria asociativa bidireccional parte del diseño de red neuronal Hopfield, y por esa razón también representa en forma de matriz la fuerza de conexión entre sus neuronas; pero adicionalmente, al distribuir las neuronas en dos capas la *BAM* de Kosko cuenta con la ventaja de ser un modelo de memoria heteroasociativa, es decir, existe la posibilidad que haya al menos una asociación en el conjunto fundamental de modo que el patrón de salida es diferente al patrón de entrada, sabiendo que todas las neuronas de la red son representadas por los componentes de un patrón específico de entrada y uno de salida.

Mientras que cada una de las s neuronas de la red neuronal de Hopfield —representadas por separado en los componentes de un patrón específico de dimensión s — tiene una fuerza de conexión con cada una de las $s-1$ restantes, las neuronas de la *BAM* de Kosko, divididas en dos capas, se conectan de manera que toda neurona tiene una fuerza de conexión con cada una de las neuronas de la capa a la que no pertenece. De hecho, la conexión entre estas dos capas representa precisamente la relación que existe entre un patrón de entrada y uno de salida de dimensión s y r correspondientemente, por lo tanto no existe fuerza de conexión entre las neuronas que pertenecen a una misma capa.

Tomando en cuenta el modelo de neurona de McCulloch y Pitts, los componentes de los patrones del conjunto fundamental de la *BAM* descrita en esta sección pertenecen al conjunto $\{0, 1\}$, pero igualmente que la memoria asociativa de Hopfield consigue mejores resultados si se utilizan valores bipolares; en resumen, esto es equivalente a establecer que $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ donde $V = \{-1, 1\}$ y $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$: especificaciones necesarias para la explicación de la fase de aprendizaje y reconocimiento de este modelo de memoria asociativa que a continuación se presentan.

Fase de aprendizaje.- Se obtienen p matrices de dimensión $r \times s$ al realizar $\forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ la operación $\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t$, posteriormente, tales matrices se suman para generar la matriz A con $m = r$ filas y $n = s$ columnas. Finalmente, de manera adicional se calcula la matriz transpuesta de A establecida en la expresión (2.13).

$$A^t = \left\{ \sum_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t] \right\}^t = \sum_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \cdot (\mathbf{x}^\mu)^t]^t = \sum_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \cdot (\mathbf{y}^\mu)^t] = [a_{ji}]_{s \times r} \text{ donde } a_{ji} = \sum_{\mu=1}^p (x_j^\mu \cdot y_i^\mu) \quad (2.13)$$

Como lo menciona Kosko en su artículo, la información de A^t está disponible si se cuenta con la información de A , por lo tanto si la memoria es implementada eléctricamente, por ejemplo, no es necesario almacenar ambas matrices. Concretamente, las formulas presentadas a continuación se adaptan y solamente utilizan las entradas de la matriz A .

Fase de reconocimiento.- Esta fase inicia cuando se presenta en la *BAM* un patrón $\mathbf{x}^\omega \in V^s$ o un patrón $\mathbf{y}^\omega \in V^r$ donde $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, y dependiendo de este patrón el estado de las

neuronas en la red cambia a través del tiempo, hasta que el estado de éstas en el tiempo t sea igual al estado anterior en el tiempo $t-1$. De forma que un patrón de dimensión s en el tiempo t representa el estado de las s neuronas de la capa correspondiente en ese tiempo y es denotado como $\mathbf{x}(t)$, similarmente, un patrón de dimensión r en el tiempo t determina el estado de las r neuronas de la otra capa en ese tiempo y es expresado como $\mathbf{y}(t)$; de este modo el estado de la *BAM* en el tiempo $t+1$ se indica con los patrones $\mathbf{x}(t+1)$ y $\mathbf{y}(t+1)$. En relación con el valor de la i -ésima neurona en el tiempo t perteneciente al patrón $\mathbf{y}(t)$ y el valor de la j -ésima neurona en el mismo tiempo perteneciente al patrón $\mathbf{x}(t)$, se expresan como $y_i(t)$ y $x_j(t)$ respectivamente.

El resumen de la fase de reconocimiento descrita en el párrafo anterior es detallado en las siguientes instrucciones.

Cuando se presenta un patrón $\mathbf{x}^\omega \in V^s$, primeramente, para el tiempo $t = 0$ se hace $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^\omega$ de modo que $\forall j \in \{1, 2, \dots, s\} x_j(t) = x_j^\omega(t)$, y en seguida se calcula el vector $\mathbf{y}(t)$, donde cada uno de sus componentes se obtiene de acuerdo con la regla (2.14).

$$y_i(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^s [a_{ij} \cdot x_j(t)] > 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{j=1}^s [a_{ij} \cdot x_j(t)] \leq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Después se genera el vector $\mathbf{x}(t+1)$ en el cual cada componente $x_j(t+1)$ se calcula empleando la expresión (2.15).

$$x_j(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^r [a_{ij} \cdot y_i(t)] > 0 \\ x_j(t) & \text{si } \sum_{i=1}^r [a_{ij} \cdot y_i(t)] = 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{i=1}^r [a_{ij} \cdot y_i(t)] < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

De manera similar a la instrucción anterior, se genera el vector $\mathbf{y}(t+1)$ donde cada componente $y_i(t+1)$ se calcula con la expresión (2.16).

$$y_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^s [a_{ij} \cdot x_j(t)] > 0 \\ y_i(t) & \text{si } \sum_{j=1}^s [a_{ij} \cdot x_j(t)] = 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{j=1}^s [a_{ij} \cdot x_j(t)] < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Si $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{x}(t)$ entonces el vector recuperado es $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(1)$ y el proceso termina. En caso contrario se hace $t = t+1$ y se calcula el vector $\mathbf{x}(t+1)$ y el vector $\mathbf{y}(t+1)$ usando las

expresiones (2.15) y (2.16) respectivamente, repitiendo este procedimiento tantas veces hasta llegar a un valor $t = \tau$ para el cual $\mathbf{x}(\tau+1) = \mathbf{x}(\tau)$ tal que $x_j(\tau+1) = x_j(\tau) \forall j \in \{1, 2, \dots, s\}$, entonces el proceso finaliza y el patrón recuperado es igual a $\mathbf{y}(\tau)$.

Para el caso en el cual se presenta un patrón $\mathbf{y}^\omega \in V^r$, se hace $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}^\omega$ para el tiempo $t = 0$ de forma que $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\} y_i(t) = y_i^\omega(t)$, y después se calcula el vector $\mathbf{x}(t)$, donde cada uno de sus componentes se genera aplicando la regla (2.17).

$$x_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^r [a_{ij} \cdot y_i(t)] > 0 \\ -1 & \text{si } \sum_{i=1}^r [a_{ij} \cdot y_i(t)] \leq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Posteriormente, se calculan los patrones $\mathbf{y}(t+1)$ y $\mathbf{x}(t+1)$ con ayuda de las expresiones (2.16) y (2.15) correspondientemente, y si $\mathbf{y}(t+1) = \mathbf{y}(t)$ entonces el vector recuperado es $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1)$ y el proceso termina. En caso contrario se hace $t = t+1$ y se calcula el vector $\mathbf{y}(t+1)$ y el vector $\mathbf{x}(t+1)$ usando las expresiones (2.16) y (2.15) respectivamente, repitiendo este procedimiento tantas veces hasta llegar a un valor $t = \tau$ para el cual $\mathbf{y}(\tau+1) = \mathbf{y}(\tau)$ tal que $y_i(\tau+1) = y_i(\tau) \forall i \in \{1, 2, \dots, r\}$, entonces el proceso finaliza y el patrón recuperado es igual a $\mathbf{x}(\tau)$.

2.6 Evolución de las memorias asociativas bidireccionales

A través del tiempo se han desarrollado memorias asociativas bidireccionales utilizando diversos métodos de aprendizaje y recuperación; sin embargo, dentro de este desarrollo sólo algunos trabajos incluyen ideas innovadoras que se diferencian significativamente en relación con los anteriores modelos de memoria asociativa bidireccional, proponiendo nuevos algoritmos o mejorando los ya existentes. Dicha evolución se presenta en esta sección por medio de un conjunto de trabajos que cronológicamente se sintetizan y organizan en tablas.

Cada tabla contiene cuatro columnas, la primera indica el año en que se publicó el trabajo sobre las *BAM*, cuyo autor principal se muestra en la siguiente columna; la antepenúltima columna contiene el nombre y el acrónimo —en caso de existir— del modelo *BAM*, del método o del análisis presentado en tal publicación. Finalmente la última columna contiene la descripción de modo sucinto de la característica principal del trabajo respectivo.

Los modelos contenidos en las tablas fueron seleccionados tomando como referencia la creación o modificación de algoritmos que representan una mejora o que proponen métodos alternativos de aprendizaje y recuperación respecto de los algoritmos anteriores. Y debido a la cantidad de trabajos que cumplen con estas características, no se mencionan aquellos trabajos que a juicio del autor de este trabajo de tesis, son modificaciones menores de los incluidos en las tablas.

La tabla (2.6.1) muestra los trabajos realizados en las postrimerías de la década de los ochenta, a partir del periodo en que se dio a conocer la primera *BAM*.

Año	Autor	Nombre y acrónimo	Característica distintiva
1988	Kosko	<i>BAM</i> [14]	Primera memoria asociativa bidireccional.
	Haines <i>et. al</i>	<i>Not homogeneous BAM</i> [36]	Se introducen los umbrales diferentes de cero.
1989	Wang Y <i>et al</i>	<i>Multiple Training (MT)</i> [37]	Se entrena la <i>BAM</i> con la misma pareja de patrones múltiples ocasiones para intentar que, al menos, esta pareja sea recuperada.
	Tai <i>et al</i>	<i>High-Order Bidirectional Associative Memory (HOBAM)</i> [38]	En la etapa de codificación de la <i>HOBAM</i> de orden k , se utiliza la operación de elevar al exponente k el producto interno de los vectores de entrada.

Tabla 2.6.1 Trabajos acerca de las *BAM* durante los años 1988 y 1989.

Las *BAM* continuaron desarrollándose en el siguiente lustro, siendo 1990 y 1991 un lapso donde se destacan las técnicas aplicadas en la fase de entrenamiento de estos modelos, las cuales son presentadas en la tabla (2.6.2). Análogamente, en la tabla (2.6.3) se muestran los trabajos correspondientes dados a conocer entre 1992 y 1993; además, de manera aislada en la tabla (2.6.4) se presenta el surgimiento de diversas ideas concernientes con la implementación de las *BAM* y nuevos diseños de algoritmos, pertenecientes al periodo que obtuvo mayor actividad científica respecto de los años anteriores: el año de 1994.

Año	Autor	Nombre y acrónimo	Característica distintiva
1990	Jeng <i>et al</i>	<i>Exponencial BAM (EBAM)</i> [39]	La regla de actualización utiliza la operación exponencial que contiene como base un número $\alpha > 1$ y como exponente el producto interno de los vectores de entrada.
	Wang Y <i>et al</i>	<i>MT and dummy addition</i> [40]	Utiliza de nuevo el entrenamiento múltiple con una variante: la extensión <i>dummy</i> de los vectores.
	Wang Y <i>et al</i>	<i>MT specifications</i> [41]	Especifica el número mínimo de veces de entrenamiento de una asociación para asegurar que el correspondiente par sea recuperado en el proceso de entrenamiento múltiple.
	Simpson	<i>Higher Ordered BAM and Intraconnected BAM (IBAM)</i> [42]	La intra e interconexión de las diferentes capas de los heterocorrelacionadores.
1991	Wang Y <i>et al</i>	<i>Linear Programming/Multiple Training (LP/MT)</i> [43]	Mediante técnicas de programación lineal se calcula el número de veces de entrenamiento de una asociación para asegurar que el correspondiente par sea recuperado en el proceso de entrenamiento múltiple.
	Leung <i>et al</i>	<i>Codificación Householder</i> [44]	Se aplica la transformada <i>Householder</i> en la etapa de codificación.
	Srinivasan <i>et al</i>	<i>Unlearning</i> [45]	Se crea la matriz de correlación cancelando los estados espurios (se induce a que algunos patrones no se aprendan).

Tabla 2.6.2 Publicaciones referentes a las *BAM* en 1990 y 1991.

Año	Autor	Nombre y acrónimo	Característica distintiva
1992	Wang W <i>et al</i>	<i>Modified EBAM (MEBAM)</i> [46]	Agrega un término de autocorrelación al exponente.
	Jeng <i>et al</i>	<i>Stable High order BAM (SHBAM)</i> [47]	Modelo general de correlación para asegurar estabilidad en la <i>HOBAM</i> y en la <i>EBAM</i> .
	Yu <i>et al</i>	<i>Generalized Bidirectional Associative Memory (GBAM)</i> [48]	Pondera los patrones fundamentales de manera que cumplan con la condición de continuidad propuesta por Kosko, en lugar de buscar que los patrones sean estados estables.
1993	Lee <i>et al</i>	<i>Correlation Significance (CS)</i> [49]	Similar al <i>LP/MT</i> , se generan ponderaciones. Se utiliza el método del gradiente descendiente. La función de error (ponderaciones) se actualiza en cada paso de la recuperación.
	Perfetti	<i>Optimal Gradient Descent Learning</i> [50]	Utiliza el método del gradiente descendiente de manera que se logren maximizar los radios de atracción de cada uno de los patrones entrenados.
	Leung	<i>Enhanced Householder Coding Algorithm (EHCA)</i> [51]	Fusiona en una sola matriz las dos matrices del <i>Householder</i> .
	Leung	<i>Adaptative Ho-Kashyap Bidirectional Learning (AHKBL)</i> [52]	Propone una nueva regla de aprendizaje para la <i>BAM</i> : <i>Adaptive Ho-Kashyap Bidirectional Learning (AHKBL)</i> .

Tabla 2.6.3 Trabajos sobre las *BAM* entre 1992 y 1993.

Año	Autor	Nombre y acrónimo	Característica distintiva
1994	Khorasani <i>et al</i>	<i>BAM modificada</i> [53]	Utiliza la técnica de <i>successive over-relaxation</i> para encontrar pesos y los umbrales. Su objetivo no es minimizar la función de energía, sino generalizar el aprendizaje de memorias autoasociativas basadas en Hopfield.
	Wang C <i>et al</i>	<i>Implementation of EBAM using VLSI circuits</i> [54]	Se realiza el análisis de la <i>EBAM</i> implementada con circuitos <i>VLSI</i> , con respecto a su radio de atracción y su capacidad de almacenamiento.
	Xu <i>et al</i>	<i>Asymmetric Bidirectional Associative Memory (ABAM)</i> [55]	Propone pesos de interconexión asimétricos para la matriz de correlación. Además, se crea un operador de interpolación en la codificación para asegurar que todos los patrones sean estados estables si son linealmente independientes.
	Hattori <i>et al</i>	<i>Quick Learning for BAM (QLBAM) and Pseudo-Relaxation Learning Algorithm (PRLAB)</i> [56]	Utiliza el <i>PRLAB</i> para encontrar los pesos y los umbrales de la matriz de correlación.
	Leung	<i>Bidirectional Learning (BL)</i> [57]	Se basa en la idea del <i>perceptron</i> para generar una matriz de conexiones.
	Hu <i>et al</i>	<i>Parallel Orthogonalization Based BAM (POBAM) y Unilateral Orthogonalization Based BAM (UOBAM)</i> [58]	Se proponen dos tipos de codificación basados en técnicas de ortogonalización: el <i>POBAM</i> , que tiene conexiones simétricas, y el <i>UOBAM</i> , con conexiones asimétricas.
	Wang Z	<i>Linear and No Linear BAM</i> [59]	Se presentan dos diseños de <i>BAM</i> , una lineal y otra no lineal. Ambas utilizan una matriz óptima diferente a una matriz de correlación.
Sarkar	<i>Three Layer BAM (TLBAM)</i> [60]	Se propone una <i>BAM</i> de tres capas, en la que se calcula la cantidad exacta de ruido en la recuperación.	

Tabla 2.6.4 Trabajos acerca de las *BAM* durante el año 1994.

De igual forma que la información anterior, se continúa con la descripción de los trabajos de las *BAM* a través del tiempo en las tablas (2.6.5) y (2.6.6).

Año	Autor	Nombre y acrónimo	Característica distintiva
1996	Osana <i>et al</i>	<i>Chaotic Bidirectional Associative Memory (CBAM)</i> [61]	Utiliza neuronas caóticas en la etapa de decodificación, y permite asociaciones de uno a muchos.
1997	Chen <i>et al</i>	<i>Improved Exponential BAM (IEBAM)</i> [62]	La <i>IEBAM</i> fusiona los dos exponentes de la <i>MEBAM</i> en uno solo, lo que permite evitar el requisito de continuidad.
	Haryono <i>et al</i>	<i>Bipolar-Orthogonal Augmentation Method (BOAM)</i> [63]	Al igual que Wang Y (1990) se aumentan elementos dummy, la única diferencia es que los elementos de Wang eran binarios y los de Haryono son bipolares.
	Araújo <i>et al</i>	<i>Unlearning of Spurious Attractors (USA) and Bidirectional Delta Rule (BDR)</i> [64]	El <i>USA</i> elimina los atractores espurios y el <i>BDR</i> actualiza los pesos de la matriz de correlación bidireccionalmente mientras existan atractores espurios.
1999	Ritter <i>et al</i>	<i>Morphological BAM (MBAM)</i> [65]	Se basan en las operaciones morfológicas de dilatación y erosión, y son <i>one-shot</i> .

Tabla 2.6.5 Publicaciones referentes a las *BAM* desde 1996 hasta 1999.

Año	Autor	Nombre y acrónimo	Característica distintiva
2000	Wu <i>et al</i>	<i>Feedforward BAM</i> [66]	Se diseñan dos <i>BAM feedforward</i> , una compuesta por los patrones de entrada y un vector intermedio, y la otra, con los patrones de salida y el mismo vector; además, es <i>one-shot</i> .
2001	Lenze	<i>Improved BL (IBL)</i> [67]	La condición para el buen funcionamiento del <i>BL</i> era que los patrones fueran linealmente separables; <i>IBL</i> utiliza la traslación y la dilatación para evadir esa condición.
	Eom <i>et al</i>	<i>Weighted EBAM</i> [68]	Basada en la <i>EBAM</i> se calcula el radix que garantiza la atracción dentro de cierto radio. Las ponderaciones utilizadas para obtener el radix se calculan mediante el algoritmo <i>Pseudo-Relaxation</i> .
2004	Lee <i>et al</i>	<i>Improved recall of BAM</i> [69]	Se propone el concepto de bola de Hamming de orden q .
2005	Zheng <i>et al</i>	<i>Optimal Gradient Descent Algorithm (OGDA)</i> [70]	Utiliza el método del aumento <i>dummy</i> para la corrección de los patrones recuperados; además, agranda el radio de atracción mediante el algoritmo del gradiente descendiente óptimo.
	Shen <i>et al</i>	<i>Maximum Noise Tolerance BAM</i> [71]	Mediante un algoritmo genético se pondera la matriz de correlación.
	Du <i>et al</i>	<i>Evolutionary QLBAM, PRLAB y BL (SVBAM, EPRLAB y EBL)</i> [72]	Se analiza la sensibilidad al ruido en la <i>BAM</i> para mejorar su inmunidad al ruido y se presentan los esquemas de codificación <i>SVBAM</i> , <i>EPRLAB</i> y <i>EBL</i> , que funcionan mejor que las versiones originales <i>QLBAM</i> , <i>PRLAB</i> y <i>BL</i> respectivamente.
	Du <i>et al</i>	<i>Evolutionary pseudo-relaxation learning algorithm for BAM (EPRBAM)</i> [73]	Algoritmo de aprendizaje <i>EPRBAM</i> , que utiliza un algoritmo genético y un método de pseudo-relajación, para una solución de la matriz de pesos de la <i>BAM</i> .
	Rajapakse <i>et al</i>	<i>Concept lattices via BAM</i> [74]	<i>BAM</i> que utiliza el concepto de <i>lattice</i> estableciendo los pesos de conexión de acuerdo a la regla propuesta por Belohlavek.
	Maeda <i>et al</i>	<i>BAM learning capability using simultaneous perturbation</i> [75]	<i>BAM</i> que tiene un aprendizaje recursivo que usa un método de optimización perturbación simultánea.
2006	Chartier <i>et al</i>	<i>BAM for binary and grey-level patterns</i> [76]	Permite el aprendizaje tanto de patrones binarios como de patrones en escala de grises.

Tabla 2.6.6 Trabajos sobre las *BAM* en el periodo 2000-2006.

La siguiente tabla inicia con la publicación de las *BAM* alfa-beta, modelo cuyo fundamento matemático se explica en el capítulo que sigue, debido a que es el trabajo del que parte la propuesta de esta tesis. Por lo tanto, la tabla (2.6.7) es de gran importancia porque indica los avances científicos realizados, desde la aparición de las *BAM* alfa-beta, hasta dicha propuesta.

Año	Autor	Nombre y acrónimo	Característica distintiva
2007	Acevedo <i>et al</i>	<i>BAM alfa-beta</i> [23]	Memoria asociativa bidireccional alfa-beta, la cual recupera todos los patrones del conjunto fundamental utilizando un algoritmo <i>one-shot</i> .
2008	Vázquez <i>et al</i>	<i>BAM for True-Color Patterns</i> [77]	Memoria heteroasociativa bidireccional para patrones de color verdadero, la cual utiliza el modelo asociativo con sinapsis dinámicas, que pueden ser ajustadas incluso después de la fase de entrenamiento.
	Hong <i>et al</i>	<i>Maximum-Likelihood-Criterion BAM (MLBAM)</i> [78]	<i>BAM</i> que utiliza el criterio de máxima probabilidad y empleándolo para problemas de seguimiento en visión por computadora.
2009	Hong <i>et al</i>	<i>Extended MLBAM</i> [79]	Regla de aprendizaje y análisis teórico de una <i>BAM</i> extendida (<i>MLBAM</i>), utilizando el criterio de máxima probabilidad basado en la convergencia de la regla de aprendizaje y la tolerancia al ruido de la red.
	Chartier <i>et al</i>	<i>BAM encompassing correlational and topological properties</i> [80]	Modelo bidireccional recurrente que distribuye los pesos de las conexiones produciendo un bajo nivel de dispersión en el espacio de pesos. Además el modelo usa la representación <i>sparse</i> .
	Chartier <i>et al</i>	<i>BAM learning of nonlinearly separable tasks</i> [81]	Introducción de un parámetro asimétrico en la función de salida de la <i>BAM</i> caótica, además el aprendizaje reforzado puede permitir una arquitectura de <i>BAM</i> dual para almacenar y recuperar patrones no linealmente separables.
	Aziz	<i>Improved IBAM</i> [82]	Modelo de una memoria de almacenamiento directo bidireccional, mejorando la memoria asociativa <i>IBAM</i>
2010	Acevedo <i>et al</i>	<i>BAM alfa-beta for storing concept lattices</i> [34]	Implementación de la <i>BAM</i> alfa-beta que almacena el concepto de <i>lattice</i> .
2011	Chartier <i>et al</i>	<i>Encoding static and temporal patterns with a BAM</i> [83]	<i>BAM</i> que puede codificar patrones con valores reales y binarios, logrando asociaciones de muchos a uno.
	Qadir <i>et al</i>	<i>Protein Processor Associative Memory (PPAM)</i> [84].	Análisis comparativo del <i>PPAM</i> con la <i>BAM</i> original de Kosko y la <i>PRLAB</i> .
	Leung <i>et al</i>	<i>Weight fault on BAM</i> [85]	Específica la tolerancia a fallas, concretamente en la falla de pesos relacionada con el rendimiento de la red neuronal <i>BAM</i> .
	Zheng <i>et al</i>	<i>Learning by error backpropagation</i> [86]	Método para diseñar <i>BAM</i> con conexiones asimétricas, en donde los patrones recordados no son necesariamente en forma binaria.

Tabla 2.6.7 Publicaciones acerca de las *BAM* durante 2007-2011.

CAPÍTULO 3

Materiales y Métodos

Aquí se describen con detalle las operaciones y modelos de las memorias autoasociativas y heteroasociativas alfa-beta, cuyas propiedades —también presentadas en seguida— son herramientas matemáticas de la propuesta del capítulo posterior, el cual parte del modelo de *BAM* alfa-beta incluido al final de este apartado junto con sus características principales.

3.1 Operadores binarios alfa (α) y beta (β)

El operador alfa, representado con el símbolo griego del mismo nombre (α), utiliza como argumentos elementos del conjunto $V = \{0, 1\}$ y cuyo valor resultante únicamente pertenece al conjunto $W = \{0, 1, 2\}$, dicho de otro modo, $\alpha: V \times V \rightarrow W$. Pero para el caso del operador beta, igualmente simbolizado con la letra griega de ese nombre (β), sucede que $\beta: W \times V \rightarrow V$, esto quiere decir, que el orden de los argumentos es importante, debido a que el primer argumento pertenece estrictamente al conjunto W y el segundo al conjunto V .

Los conjuntos del párrafo anterior se representan con las letras V y W , porque en los modelos de memoria asociativa alfa-beta, corresponden con los conjuntos a los que pertenecen los valores de los componentes de los patrones, tanto de entrada como de salida, y los valores de los componentes de la memoria asociativa A correspondientemente.

De acuerdo con las definiciones de las operaciones α y β , mostradas en las tablas (2.4.1) y (2.4.2) del capítulo anterior, se desprenden las siguientes propiedades.

Propiedad	Representación matemática
Isoargumentos en α .	$\alpha(x, x) = 1$
Intercambio de argumentos en α .	$(x \leq y) \leftrightarrow [\alpha(x, y) \leq \alpha(y, x)]$
α creciente por la izquierda.	$(x \leq y) \leftrightarrow [\alpha(x, z) \leq \alpha(y, z)]$
α decreciente por la derecha.	$(x \leq y) \leftrightarrow [\alpha(z, x) \geq \alpha(z, y)]$
α distributiva por la derecha respecto del \vee .	$\alpha[(x \vee y), z] = \alpha(x, z) \vee \alpha(y, z)$
α distributiva por la derecha respecto del \wedge .	$\alpha[(x \wedge y), z] = \alpha(x, z) \wedge \alpha(y, z)$

Tabla 3.1.1 Propiedades de la operación binaria α .

Propiedad	Representación matemática
Propiedad del 1.	$\beta(1, x) = x$
Isoargumentos en β .	$\beta(x, x) = x \forall x \in V$
β creciente por la izquierda.	$(x \leq y) \leftrightarrow [\beta(x, z) \leq \beta(y, z)]$
β creciente por la derecha.	$(x \leq y) \leftrightarrow [\beta(z, x) \geq \beta(z, y)]$
β distributiva por la derecha respecto del \vee .	$\beta[(x \vee y), z] = \beta(x, z) \vee \beta(y, z)$
β distributiva por la derecha respecto del \wedge .	$\beta[(x \wedge y), z] = \beta(x, z) \wedge \beta(y, z)$
β distributiva por la izquierda respecto del \vee .	$\beta[x, (y \vee z)] = \beta(x, y) \vee \beta(x, z)$
β distributiva por la izquierda respecto del \wedge .	$\beta[x, (y \wedge z)] = \beta(x, y) \wedge \beta(x, z)$

Tabla 3.1.2 Propiedades de la operación binaria β .

Como los operadores α y β son utilizados en los modelos de memoria asociativa alfa-beta en la fase de aprendizaje y recuperación respectivamente, la combinación de éstos proporciona propiedades útiles en ambas etapas. Estas propiedades se presentan en la tabla (3.1.3).

Propiedad	Representación matemática
β inversa de α por la derecha.	$\beta[\alpha(x, y), y] = x$
β inversa de α por la izquierda.	$\beta[\alpha(x, y), x] = x$
Isoargumentos en α como argumento de β	$\beta[\alpha(x, x), y] = y$

Tabla 3.1.3 Propiedades combinadas de las operaciones binarias α y β .

En resumen, los conjuntos V y W , los operadores usuales mínimo (\wedge) y máximo (\vee), además de las operaciones α y β , forman el sistema algebraico de las memorias asociativas del mismo nombre que estas dos últimas operaciones.

También, es necesario mencionar que las propiedades y las definiciones presentadas en esta sección (3.1) y las tres sucesivas, se encuentran en [22]; aunque para efectos de consistencia de este documento, la simbología puede variar.

3.2 Operaciones matriciales α -max, α -min, β -max y β -min

Sean B , C y D tres matrices arbitrarias de orden $r \times q$, $q \times s$ y $r \times s$ correspondientemente, tal que $q, r, s \in \mathbb{Z}^+$, existen determinadas operaciones matriciales fundamentales empleadas en las memorias asociativas alfa-beta, denominadas α -max, α -min, β -max y β -min las cuales se muestran en ese orden, mediante las cuatro expresiones siguientes utilizando los operadores \sqcup_α , \sqcap_α , \sqcup_β y \sqcap_β .

$$\alpha\text{-max: } [b_{ik}]_{r \times q} \sqcup_\alpha [c_{kj}]_{q \times s} = [d_{ij}]_{r \times s} \text{ donde } d_{ij} = \bigvee_{k=1}^q \alpha(b_{ik}, c_{kj}) \quad (3.1)$$

$$\alpha\text{-min: } [b_{ik}]_{r \times q} \sqcap_\alpha [c_{kj}]_{q \times s} = [d_{ij}]_{r \times s} \text{ donde } d_{ij} = \bigwedge_{k=1}^q \alpha(b_{ik}, c_{kj}) \quad (3.2)$$

Evidentemente, para las dos expresiones anteriores los componentes de B y C pertenecen al conjunto V , mientras que en la matriz D pertenecen al conjunto W ; en cambio, para las dos siguientes, los componentes de B pertenecen W y los de C y D pertenecen a V .

$$\beta\text{-max}: [b_{ik}]_{r \times q} \sqcup_{\beta} [c_{kj}]_{q \times s} = [d_{ij}]_{r \times s} \text{ donde } d_{ij} = \bigvee_{k=1}^q \beta(b_{ik}, c_{kj}) \quad (3.3)$$

$$\beta\text{-min}: [b_{ik}]_{r \times q} \sqcap_{\beta} [c_{kj}]_{q \times s} = [d_{ij}]_{r \times s} \text{ donde } d_{ij} = \bigwedge_{k=1}^q \beta(b_{ik}, c_{kj}) \quad (3.4)$$

Se hallan características particulares en estas operaciones cuando alguno o ambos de sus argumentos matriciales representan patrones, es decir, que las matrices B y C sean vectores renglón o columna. A consecuencia de la importancia de estas particularidades, y la relación que tienen con las memorias asociativas alfa-beta, se citan los siguientes lemas.

Lema 3.1. Sean $\mathbf{x} \in V^s$ y $\mathbf{y} \in V^r$; entonces $\mathbf{y} \sqcup_{\alpha} \mathbf{x}^t$ es una matriz de $r \times s$, y además se cumple que: $\mathbf{y} \sqcup_{\alpha} \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \sqcap_{\alpha} \mathbf{x}^t$.

Dado el lema preliminar y exclusivamente cuando se cumplen sus condiciones, se sustituye por simplicidad el símbolo de los operadores \sqcup_{α} y \sqcap_{α} con el símbolo \boxplus_{α} , resultando que $\mathbf{y} \sqcup_{\alpha} \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \boxplus_{\alpha} \mathbf{x}^t = \mathbf{y} \sqcap_{\alpha} \mathbf{x}^t$, cuyo ij -ésimo componente de tal matriz se expresa a continuación.

$$(\mathbf{y} \boxplus_{\alpha} \mathbf{x}^t)_{ij} = \alpha(y_i, x_j) \quad (3.5)$$

Para $\mathbf{y}^{\mu} \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^{\mu})^t$ tal que $\mu \in \{1, 2, \dots, p\}$ y $p \in \mathbb{Z}^+$, el componente ij -ésimo es como sigue.

$$(\mathbf{y}^{\mu} \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^{\mu})^t)_{ij} = \alpha(y_i^{\mu}, x_j^{\mu}) \quad (3.6)$$

Lema 3.2. Sean $\mathbf{x} \in V^s$ y A una matriz de dimensión $r \times s$. La operación $A \sqcup_{\beta} \mathbf{x}$ da como resultado un vector columna de dimensión r , donde el i -ésimo componente tiene la siguiente forma.

$$(A \sqcup_{\beta} \mathbf{x})_i = \bigvee_{j=1}^s \beta(a_{ij}, x_j) \quad (3.7)$$

Lema 3.3. Sean $\mathbf{x} \in V^s$ y A una matriz de dimensión $r \times s$. La operación $A \sqcap_{\beta} \mathbf{x}$ da como resultado un vector columna de dimensión r , donde el i -ésimo componente tiene la siguiente forma.

$$(A \sqcap_{\beta} \mathbf{x})_i = \bigwedge_{j=1}^s \beta(a_{ij}, x_j) \quad (3.8)$$

3.3 Relaciones entre matrices y tipos de ruido

Antes de continuar con la descripción de las memorias asociativas alfa-beta, se enuncian las relaciones matriciales necesarias para definir, de modo matemático, los tipos de ruido presentes en un patrón. Para lograrlo, se consideran tres matrices arbitrarias B , C y D de dimensión $r \times s$, donde $r, s \in \mathbb{Z}^+$.

El máximo de dos matrices B y C es otra matriz representada como $D = B \vee C$, de modo que $d_{ij} = b_{ij} \vee c_{ij}$ corresponde con la definición de su ij -ésimo componente. Mientras que el mínimo de estas dos mismas matrices se denota $D = B \wedge C$, tal que $d_{ij} = b_{ij} \wedge c_{ij}$.

$B \leq C$ indica que la matriz B es menor o igual que C si y sólo si $b_{ij} \leq c_{ij} \forall i, j$ de manera que $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, s\}$. Por consiguiente, $B < C$ señala que B es estrictamente menor que C si y sólo si $b_{ij} \leq c_{ij} \forall i, j$ de manera que $\exists u, \tilde{n}$ tal que $b_{u\tilde{n}} < c_{u\tilde{n}}$ donde $i, u \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j, \tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Como estas relaciones son fundamentales para determinar qué tipo de ruido que se puede presentar en un patrón, se utilizan para determinar los tres tipos siguientes, los cuales se enumeran dado un patrón $\mathbf{x} \in V^s$.

1. Ruido aditivo, si $\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{x}}$. Esto significa que todos los posibles cambios en los valores de las coordenadas de \mathbf{x} para obtener $\tilde{\mathbf{x}}$ consisten en colocar un valor 1 donde hay un valor 0; es decir, la única posibilidad de cambio en las coordenadas de \mathbf{x} para obtener $\tilde{\mathbf{x}}$ se traduce en la expresión siguiente: $\exists j \in \{1, 2, \dots, s\}$ para el que $x_j = 0$ y $\tilde{x}_j = 1$, pero no existe $\tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$ para el que $x_{\tilde{n}} = 1$ y $\tilde{x}_{\tilde{n}} = 0$. Además $\mathbf{x} \leq \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow x_j \leq \tilde{x}_j \forall j \in \{1, 2, \dots, s\}$.
2. Ruido sustractivo, si $\mathbf{x} \geq \tilde{\mathbf{x}}$. Esto significa que todos los posibles cambios en los valores de las coordenadas de \mathbf{x} para obtener $\tilde{\mathbf{x}}$ consisten en colocar un valor 0 donde hay un valor 1; es decir, la única posibilidad de cambio en las coordenadas de \mathbf{x} para obtener $\tilde{\mathbf{x}}$ se traduce como sigue: $\exists j \in \{1, 2, \dots, s\}$ para el que $x_j = 1$ y $\tilde{x}_j = 0$, pero no existe $\tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$ para el que $x_{\tilde{n}} = 0$ y $\tilde{x}_{\tilde{n}} = 1$. Además $\mathbf{x} \geq \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow x_j \geq \tilde{x}_j \forall j \in \{1, 2, \dots, s\}$.
3. Ruido combinado o mezclado, si el ruido es una mezcla de aditivo con sustractivo. En este caso no es posible establecer un orden entre el patrón limpio y el ruidoso, dado que los vectores pueden ser cambiados aleatoriamente, sin respetar necesariamente las reglas de los ítems 1 y 2.

Cuando el patrón no tiene ruido o su ruido es de 0%, resulta evidente que $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$.

3.4 Modelos de memoria heteroasociativa y autoasociativa alfa-beta

Es tiempo de presentar los modelos de las memorias asociativas alfa-beta y sus características inherentes, primeramente introduciendo los dos posibles tipos de memoria heteroasociativa alfa-beta, denominadas *max* y *min*, e igualmente que las memorias asociativas morfológicas se denotan como A_{max} y A_{min} .

Aunque se sabe que las memorias autoasociativas son un caso especial de las memorias heteroasociativas, también se describe el modelo de las memorias autoasociativas alfa-beta *max* (A_{max}) y *min* (A_{min}) porque sus propiedades son de gran importancia para la *BAM* alfa-beta y la propuesta de este trabajo de tesis.

3.4.1 Memoria heteroasociativa alfa-beta max (A_{max})

Para definir en los párrafos posteriores la fase de aprendizaje y reconocimiento de estas memorias, se fija un conjunto fundamental igual a $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ tal que $\mathbf{x}^\mu \in V^s$, $\mathbf{y}^\mu \in V^r$ donde $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$.

Fase de aprendizaje.- Por cada una de las asociaciones del conjunto fundamental $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$ se construye una matriz realizando la operación $\mathbf{y}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{x}^\mu)^t$; después, se aplica el operador máximo a las matrices p generadas para obtener una matriz resultante A_{max} , mejor conocida como memoria asociativa alfa-beta max y especificada en la expresión (3.9). Con respecto a los componentes de esta matriz, éstos se representan con la letra griega v con subíndices para diferenciarse; así que el ij -ésimo componente queda representado como $v_{ij} \in W$, $\forall i, j$ donde $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{x}^\mu)^t] \text{ donde } v_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu) \quad (3.9)$$

Fase de reconocimiento.- Se presenta un patrón $\mathbf{x}^\omega \in V^s$ con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, a la memoria A_{max} y se realiza la operación (3.10).

$$\mathbf{y} = A_{max} \sqcap_\beta \mathbf{x}^\omega \quad (3.10)$$

Es necesario puntualizar, que el procedimiento de reconocimiento considera un patrón de entrada que pertenece al conjunto fundamental; sin embargo, no significa que la memoria no pueda operar con patrones ruidosos, por lo tanto, para una versión ruidosa de un patrón de entrada la operación de reconocimiento es la misma, sólo hay que reemplazar el patrón \mathbf{x}^ω por su patrón ruidoso respectivo.

Por otro lado, acerca de las particularidades de las memorias heteroasociativas alfa-beta max , éstas son expresadas en dos lemas y cuatro teoremas en los párrafos que siguen.

Lema 3.4. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{max} . Si ω es un valor arbitrario de índice tal que $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ entonces $A_{max} \sqcap_\beta \mathbf{x}^\omega \geq \mathbf{y}^\omega$.

Teorema 3.1. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{max} . Si ω es un valor de índice arbitrario tal que $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, y si además para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ se cumple que $\exists j = \tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$, el cual depende de ω y de i , tal que $v_{i\tilde{n}} = \alpha(y_i^\omega, x_j^\omega)$, entonces la recuperación $A_{max} \sqcap_\beta \mathbf{x}^\omega$ es correcta; es decir $A_{max} \sqcap_\beta \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$.

Teorema 3.2 [forma equivalente matricial del teorema (3.1)]. Si para cada asociación $(\mathbf{x}^\omega, \mathbf{y}^\omega)$ del conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta A_{max} , se cumple que cada fila de la matriz $A_{max} - \mathbf{y}^\omega \boxplus_\alpha (\mathbf{x}^\omega)^t$ contiene una entrada cero, entonces la memoria A_{max} recupera el conjunto de patrones de salida fundamentales en forma correcta.

Lema 3.5. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{max} , y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in V^s$ un patrón alterado que se presenta a la memoria A_{max} como entrada. Si $\exists \omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que es posible obtener el patrón $\tilde{\mathbf{x}}$ alterando el patrón fundamental \mathbf{x}^ω con ruido aditivo, entonces $A_{max} \sqcap_\beta \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{y}^\omega$.

Teorema 3.3. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{max} , y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in V^s$ un patrón alterado con ruido aditivo respecto de algún patrón del conjunto fundamental \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si se presenta $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria A_{max} como entrada, y si además para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ se cumple la condición de que $\exists j = \tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$, el cual depende de ω y de i , tal que $v_{i\tilde{n}} \leq \alpha(y^{\omega_i}, \tilde{x}_{\tilde{n}})$, entonces la recuperación $A_{max} \sqcap_\beta \tilde{\mathbf{x}}$ es correcta; es decir $A_{max} \sqcap_\beta \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}^\omega$.

Teorema 3.4. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{max} , y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in V^s$ un patrón alterado con ruido sustractivo respecto de algún patrón del conjunto fundamental \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. Al presentar $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria A_{max} como entrada se cumple lo siguiente: para cada $\tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$ tal que $x^{\omega_{\tilde{n}}}$ haya sido alterado para obtener $\tilde{x}_{\tilde{n}}$, si $\exists u \in \{1, 2, \dots, r\}$ para el que $v_{u\tilde{n}} = 1$, entonces $(A_{max} \sqcap_\beta \tilde{\mathbf{x}})_u = 0$.

De lo anterior se puede decir entonces, que el lema (3.5) y el teorema (3.3) especifican las condiciones que se deben cumplir para recuperar de manera correcta el patrón correspondiente de salida, cuando en la entrada de las memorias heteroasociativas alfa-beta A_{max} , existe ruido aditivo; en otras palabras, estas memorias tienen cierta tolerancia a dicho ruido. En contraste, una pequeña cantidad de ruido sustractivo puede tener efectos no deseados en la operación de este tipo de memorias, como lo presenta el teorema (3.4).

3.4.2 Memoria heteroasociativa alfa-beta *min* (A_{min})

La memoria heteroasociativa alfa-beta *min*, especificada como A_{min} se desarrolla por dualidad. Partiendo de los resultados obtenidos relacionados con las memorias heteroasociativas alfa-beta *max*, donde hay un operador \vee se coloca \wedge y donde hay un \wedge se sitúa un \vee , además de usar el operador \sqcap_β en lugar del operador \sqcup_β .

Con las mismas especificaciones iniciales acerca del conjunto fundamental de la memoria heteroasociativa alfa-beta *max*, y siguiendo las indicaciones del desarrollo de la memoria heteroasociativa alfa-beta *min*, se enuncia la fase de aprendizaje y recuperación de esta última, proseguido de la definición de sus teoremas correspondientes.

Fase de aprendizaje.- Por cada una de las asociaciones del conjunto fundamental $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$ se construye una matriz realizando la operación $\mathbf{y}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{x}^\mu)^t$; después, se aplica el operador mínimo a las matrices p generadas para obtener una matriz resultante A_{min} , que es especificada en la expresión (3.11). Con respecto a los componentes de esta matriz, éstos se representan con la letra griega λ con subíndices para diferenciarse; así que el ij -ésimo componente queda representado como $\lambda_{ij} \in W, \forall i, j$ donde $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

$$A_{min} = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{y}^\mu \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^\mu)^t] \text{ donde } \lambda_{ij} = \bigwedge_{\mu=1}^p \alpha(y_i^\mu, x_j^\mu) \quad (3.11)$$

Fase de reconocimiento.- Se presenta un patrón $\mathbf{x}^\omega \in V^s$ con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, a la memoria A_{min} y se realiza la operación (3.12).

$$\mathbf{y} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{x}^\omega \quad (3.12)$$

Para una versión ruidosa de un patrón de entrada la operación de reconocimiento es la misma, sólo hay que reemplazar el patrón \mathbf{x}^ω por su patrón ruidoso respectivo.

Lema 3.6. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{min} . Si ω es un valor arbitrario de índice tal que $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ entonces $A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{x}^\omega \leq \mathbf{y}^\omega$.

Teorema 3.5. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{min} . Si ω es un valor de índice arbitrario tal que $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, y si además para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ se cumple que $\exists j = \tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$, el cual depende de ω y de i , tal que $\lambda_{i\tilde{n}} = \alpha(y_i^\omega, x_{\tilde{n}}^\omega)$, entonces la recuperación $A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{x}^\omega$ es correcta; es decir $A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{x}^\omega = \mathbf{y}^\omega$.

Teorema 3.6 [forma equivalente matricial del teorema (3.5)]. Si para cada asociación $(\mathbf{x}^\omega, \mathbf{y}^\omega)$ del conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta A_{min} , se cumple que cada fila de la matriz $\mathbf{y}^\omega \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^\omega)^t - A_{min}$ contiene una entrada cero, entonces la memoria A_{min} recupera el conjunto de patrones de salida fundamentales en forma correcta.

Lema 3.7. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{min} , y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in V^s$ un patrón alterado que se presenta a la memoria A_{min} como entrada. Si $\exists \omega \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que es posible obtener el patrón $\tilde{\mathbf{x}}$ alterando el patrón fundamental \mathbf{x}^ω con ruido sustractivo, entonces $A_{min} \sqcup_{\beta} \tilde{\mathbf{x}} \leq \mathbf{y}^\omega$.

Teorema 3.7. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{min} , y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in V^s$ un patrón alterado con ruido sustractivo respecto de algún patrón del conjunto fundamental \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si se presenta $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria A_{min} como entrada, y si además para cada $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ se cumple la condición de que $\exists j = \tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$, el cual depende de ω y de i , tal que $\lambda_{i\tilde{n}} \geq \alpha(y_i^\omega, \tilde{x}_{\tilde{n}})$, entonces la recuperación $A_{min} \sqcup_{\beta} \tilde{\mathbf{x}}$ es correcta; es decir $A_{min} \sqcup_{\beta} \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{y}^\omega$.

Teorema 3.8. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria heteroasociativa alfa-beta representada por A_{min} , y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in V^s$ un patrón alterado con ruido aditivo respecto de algún patrón del conjunto fundamental \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. Al presentar $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria A_{min} como entrada se cumple lo siguiente: para cada $\tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$ tal que $x_{\tilde{n}}^\omega$ haya sido alterado para obtener $\tilde{x}_{\tilde{n}}$, si $\exists u \in \{1, 2, \dots, r\}$ para el que $\lambda_{u\tilde{n}} = 1$, entonces $(A_{min} \sqcup_{\beta} \tilde{\mathbf{x}})_u = 1$.

Como se puede observar en el teorema (3.8), una pequeña cantidad de ruido aditivo puede tener resultados no deseados en la operación de las memorias heteroasociativas alfa-beta

A_{min} . Sin embargo, hay que notar que el lema (3.7) y el teorema (3.7) especifican las condiciones que se deben cumplir para recuperar de manera correcta el patrón correspondiente de salida, cuando en la entrada de este tipo de memorias, hay ruido sustractivo; de modo que estas memorias tienen cierta inmunidad a tal ruido.

3.4.3 Memoria autoasociativa alfa-beta max (A_{max})

Una memoria autoasociativa alfa-beta max se obtiene y opera del mismo modo que la memoria descrita en la sección (3.4.1), pero con la diferencia de que $y^\mu = x^\mu \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$; por lo tanto cuando se genera una memoria heteroasociativa alfa-beta max con esta característica, deja de ser heteroasociativa y estrictamente se denomina autoasociativa, porque el patrón que se requiere recuperar correctamente es precisamente el patrón de entrada, el cual puede estar afectado por algún tipo de ruido.

Sabiendo que la única diferencia entre la memoria heteroasociativa y autoasociativa alfa-beta max es su conjunto fundamental, se adapta la fase de aprendizaje y recuperación de la memoria heteroasociativa alfa-beta max con las mismas especificaciones utilizando $\{(x^\mu, x^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ para lograr la autoasociatividad.

Fase de aprendizaje.- Por cada una de las asociaciones del conjunto fundamental (x^μ, x^μ) se construye una matriz realizando la operación $x^\mu \boxplus_\alpha (x^\mu)^t$; después, se aplica el operador máximo a las matrices p generadas para obtener una matriz resultante A_{max} , definida en la expresión (3.13). El ij -ésimo componente es representado como $v_{ij} \in W, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^p [x^\mu \boxplus_\alpha (x^\mu)^t] \text{ donde } v_{ij} = \bigvee_{\mu=1}^p \alpha(x_i^\mu, x_j^\mu) \quad (3.13)$$

Fase de reconocimiento.- Se presenta un patrón $x^\omega \in V^s$ con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, a la memoria A_{max} y se realiza la operación (3.14).

$$x = A_{max} \Gamma_\beta x^\omega \quad (3.14)$$

La operación de reconocimiento es igual para una versión ruidosa de un patrón de entrada, solamente se tiene que reemplazar el patrón x^ω por su patrón ruidoso respectivo.

Así como las memorias heteroasociativas alfa-beta max , las autoasociativas tienen propiedades inherentes, las cuales son redactadas en los párrafos siguientes.

Lema 3.8. Una memoria autoasociativa alfa-beta max tiene únicamente unos en su diagonal principal.

Teorema 3.9. Una memoria autoasociativa alfa-beta max recupera de manera correcta el conjunto fundamental completo; además, tiene capacidad máxima de aprendizaje.

Teorema 3.10. Sea $\{(x^\mu, x^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria autoasociativa alfa-beta representada por A_{max} , y sea $\tilde{x} \in V^s$ un patrón alterado con ruido aditivo respecto de algún patrón del conjunto fundamental x^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si se

presenta $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria A_{max} como entrada, y si además para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ se cumple la condición de que $\exists j = \tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$, el cual depende de ω y de i , tal que $v_{i\tilde{n}} \leq \alpha(x^\omega_i, \tilde{x}_{\tilde{n}})$, entonces la recuperación $A_{max} \sqcap_\beta \tilde{\mathbf{x}}$ es correcta; es decir $A_{max} \sqcap_\beta \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\omega$.

3.4.4 Memoria autoasociativa alfa-beta *min* (A_{min})

Dado el conjunto fundamental $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$, y tomando en cuenta las especificaciones y los resultados de la memoria autoasociativa alfa-beta *max*, se desarrolla por dualidad la memoria autoasociativa alfa-beta *min*, cuya fase de aprendizaje y recuperación se definen consecuentemente.

Fase de aprendizaje.- Por cada una de las asociaciones del conjunto fundamental $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu)$ se consigue una matriz realizando la operación $\mathbf{x}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{x}^\mu)^t$; después, se aplica el operador mínimo a las matrices p generadas para obtener una matriz resultante A_{min} , definida en la expresión (3.15). El ij -ésimo componente es expresado como $\lambda_{ij} \in W, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$.

$$A_{min} = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{x}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{x}^\mu)^t] \text{ donde } \lambda_{ij} = \bigwedge_{\mu=1}^p \alpha(x_i^\mu, x_j^\mu) \quad (3.15)$$

Fase de reconocimiento.- Se presenta un patrón $\mathbf{x}^\omega \in V^s$ con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, a la memoria A_{min} y se realiza la operación (3.16).

$$\mathbf{x} = A_{min} \sqcup_\beta \mathbf{x}^\omega \quad (3.16)$$

También, para una versión ruidosa de un patrón de entrada la operación de reconocimiento es la misma, sólo es necesario reemplazar el patrón \mathbf{x}^ω por su patrón ruidoso correspondiente.

En cuanto a las propiedades de las memorias autoasociativas alfa-beta *min*, éstas se enuncian en a continuación.

Lema 3.9. Una memoria autoasociativa alfa-beta *min* tiene únicamente unos en su diagonal principal.

Teorema 3.11. Una memoria autoasociativa alfa-beta *min* recupera de manera correcta el conjunto fundamental completo; además, tiene capacidad máxima de aprendizaje.

Teorema 3.12. Sea $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ el conjunto fundamental de una memoria autoasociativa alfa-beta representada por A_{min} , y sea $\tilde{\mathbf{x}} \in V^s$ un patrón alterado con ruido sustractivo respecto de algún patrón del conjunto fundamental \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si se presenta $\tilde{\mathbf{x}}$ a la memoria A_{min} como entrada, y si además para cada $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ se cumple la condición de que $\exists j = \tilde{n} \in \{1, 2, \dots, s\}$, el cual depende de ω y de i , tal que $\lambda_{i\tilde{n}} \geq \alpha(x^\omega_i, \tilde{x}_{\tilde{n}})$, entonces la recuperación $A_{min} \sqcup_\beta \tilde{\mathbf{x}}$ es correcta; es decir $A_{min} \sqcup_\beta \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\omega$.

3.5 Modelo de memora asociativa bidireccional alfa-beta

Acorde con la figura (2.1.4) que esquematiza la fase de reconocimiento en el inciso (b), las *BAM* adicionalmente pueden recuperar un patrón de entrada cuando se presenta un patrón de salida. Es decir, a diferencia de las memorias asociativas que operan en una sola dirección —ya que sólo recuperan un patrón de salida cuando se presenta un patrón de entrada—, las *BAM* logran operar en dos direcciones.

En el caso de la *BAM* alfa-beta, cada una de sus dos direcciones está conformada por dos pasos, que esquemáticamente se muestran en la figura (3.5.1) siguiente.

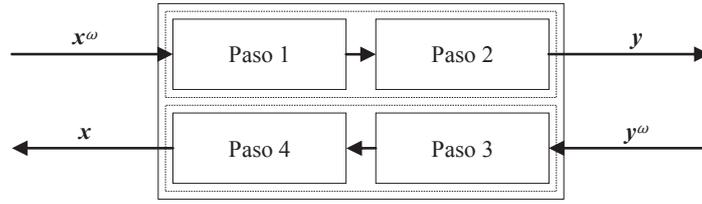


Fig. 3.5.1 Esquema de los pasos de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta.

La descripción de los pasos de la *BAM* alfa-beta incluye cinco definiciones matemáticas enunciadas en seguida, que corresponden con tres tipos de vectores y dos transformadas vectoriales.

Definición 1 (*one-hot*). Sea el conjunto $V = \{0, 1\}$ y sean $p \in \mathbb{Z}^+$, $p > 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$, tales que $1 \leq k \leq p$. El k -ésimo vector *one-hot* de p bits se define como el vector $\mathbf{h}^k \in V^p$ para el cual se cumple que el k -ésimo componente $h^k_k = 1$ y los demás componentes $h^k_{\tilde{n}} = 0$, $\forall \tilde{n} \neq k$, $1 \leq \tilde{n} \leq p$.

Definición 2 (*zero-hot*). Sea el conjunto $V = \{0, 1\}$ y sean $p \in \mathbb{Z}^+$, $p > 1$, $k \in \mathbb{Z}^+$, tales que $1 \leq k \leq p$. El k -ésimo vector *zero-hot* de p bits se define como el vector $\mathbf{h}^k \in V^p$ para el cual se cumple que el k -ésimo componente $h^k_k = 0$ y los demás componentes $h^k_{\tilde{n}} = 1$, $\forall \tilde{n} \neq k$, $1 \leq \tilde{n} \leq p$.

Nota.- En la definición (1) y (2) se excluye el valor $p = 1$ porque un vector *one-hot* y *zero-hot* de dimensión 1, por su esencia misma, no tiene razón de ser. Además, en cuatro de estas cinco definiciones se utiliza para denotar la dimensión de algunos patrones la letra p , que es utilizada en este trabajo de tesis para especificar la cardinalidad del conjunto fundamental, porque en el modelo de *BAM* alfa-beta la dimensión de estos patrones precisamente es igual al valor de p .

Definición 3 (transformada vectorial de expansión dimensional). Sea el conjunto $V = \{0, 1\}$ y sean $q \in \mathbb{Z}^+$ y $p \in \mathbb{Z}^+$. Dados dos vectores cualesquiera $\mathbf{l} \in V^q$ y $\mathbf{h} \in V^p$, se define la transformada vectorial de expansión de orden p , ϕ^+ : $V^q \rightarrow V^{q+p}$, como $\phi^+(\mathbf{l}, \mathbf{h}) = \mathbf{L} \in V^{q+p}$, vector cuyos componentes son $L_{\tilde{n}} = l_{\tilde{n}}$ para $1 \leq \tilde{n} \leq q$ y $L_{\tilde{n}} = h_{\tilde{n}-q}$ para $q+1 \leq \tilde{n} \leq q+p$.

Definición 4 (transformada vectorial de contracción dimensional). Sea el conjunto $V = \{0, 1\}$ y sean $q \in \mathbb{Z}^+$ y $p \in \mathbb{Z}^+$ tales que $1 \leq p < q$. Dado un vector cualquiera $\mathbf{L} \in V^{q+p}$, se

define la transformada vectorial de contracción de orden p , $\phi^-: V^{q+p} \rightarrow V^p$, como $\phi^-(\mathbf{L}, p) = \mathbf{l} \in V^p$, vector cuyos componentes son $l_{\tilde{n}} = L_{q+\tilde{n}}$ para $1 \leq \tilde{n} \leq p$.

Definición 5 (vector negado). Sea el conjunto $V = \{0, 1\}$ y sea un vector $\mathbf{h} \in V^q$, se define el vector negado de \mathbf{h} como el vector $\mathbf{h} \in V^q$, tal que $h_{\tilde{n}} = \neg h_{\tilde{n}}$ para $1 \leq \tilde{n} \leq q$, donde \neg es el operador lógico de negación booleano.

Aparte de las definiciones, se establece también que el conjunto fundamental de la BAM alfa-beta se denota como $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ donde $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r$, con $V = \{0, 1\}$, $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$ y $1 < p \leq \min(2^s, 2^r)$. Además, se fija la condición que todos los patrones de entrada del conjunto fundamental deben ser diferentes, es decir $\mathbf{x}^\mu = \mathbf{x}^\xi$ si y sólo si $\mu = \xi$; de igual forma, también es necesario que todos los patrones de salida del conjunto fundamental sean desiguales, por lo tanto $\mathbf{y}^\mu = \mathbf{y}^\xi$ si y sólo si $\mu = \xi$.

Los dos primeros pasos tienen como propósito obtener un patrón de salida \mathbf{y}^ω para $\omega = 1, 2, \dots, p$ presentando un patrón \mathbf{x}^ω como entrada, dada la asociación del conjunto fundamental $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$. En el primer paso a partir de este patrón de entrada \mathbf{x}^ω o una versión ruidosa del mismo ($\tilde{\mathbf{x}}^\omega$), se debe obtener un patrón *one-hot* \mathbf{h}^k , el cual es usado en el paso dos como entrada para obtener un patrón de salida \mathbf{y} , que cuando se recupera de modo correcto es igual a \mathbf{y}^ω . Y para garantizar que la recuperación del patrón de salida pertenezca al conjunto fundamental, en el segundo paso se toman todos los patrones \mathbf{y}^μ y se ordenan en una matriz, tal y como se muestra en la expresión (3.17), con la finalidad de extraerlos con ayuda del patrón \mathbf{h}^k del primer paso. Ver figura (3.5.2).

$$A_y = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^p \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_r^1 & y_r^2 & \dots & y_r^p \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

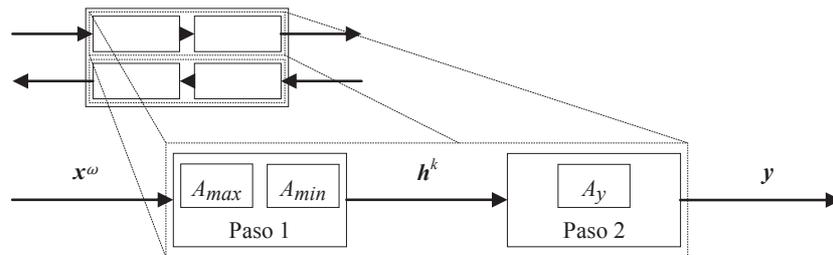


Fig. 3.5.2 Esquema del paso 1 y 2 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta.

Con igual correspondencia, se presenta esquemáticamente en la figura (3.5.3) el paso tres y cuatro, que unidos tienen como objetivo recuperar un patrón de entrada \mathbf{x}^ω a partir del patrón de salida \mathbf{y}^ω , cuya asociación $(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu)$ pertenece al conjunto fundamental. Concretamente, con el patrón \mathbf{y}^ω el paso tres obtiene un patrón *one-hot* \mathbf{h}^k que es empleado para conseguir un patrón \mathbf{x} de la matriz perteneciente al paso cuatro, donde los componentes de esta matriz, son precisamente todos los componentes de los patrones de entrada del conjunto fundamental organizados como se muestra en la expresión (3.18).

$$A_x = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^p \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_s^1 & x_s^2 & \dots & x_s^p \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

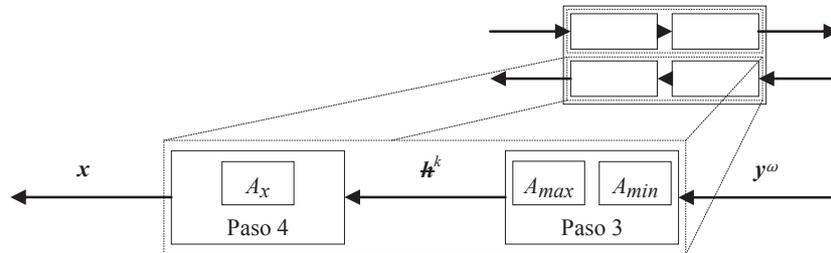


Fig. 3.5.3 Esquema del paso 3 y 4 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta.

Ya establecido lo anterior, se continúa con la descripción del algoritmo de la *BAM* alfa-beta, el cual es presentado por medio de diagramas de flujo que corresponden con la fase de aprendizaje y recuperación de cada una de las dos direcciones posibles.

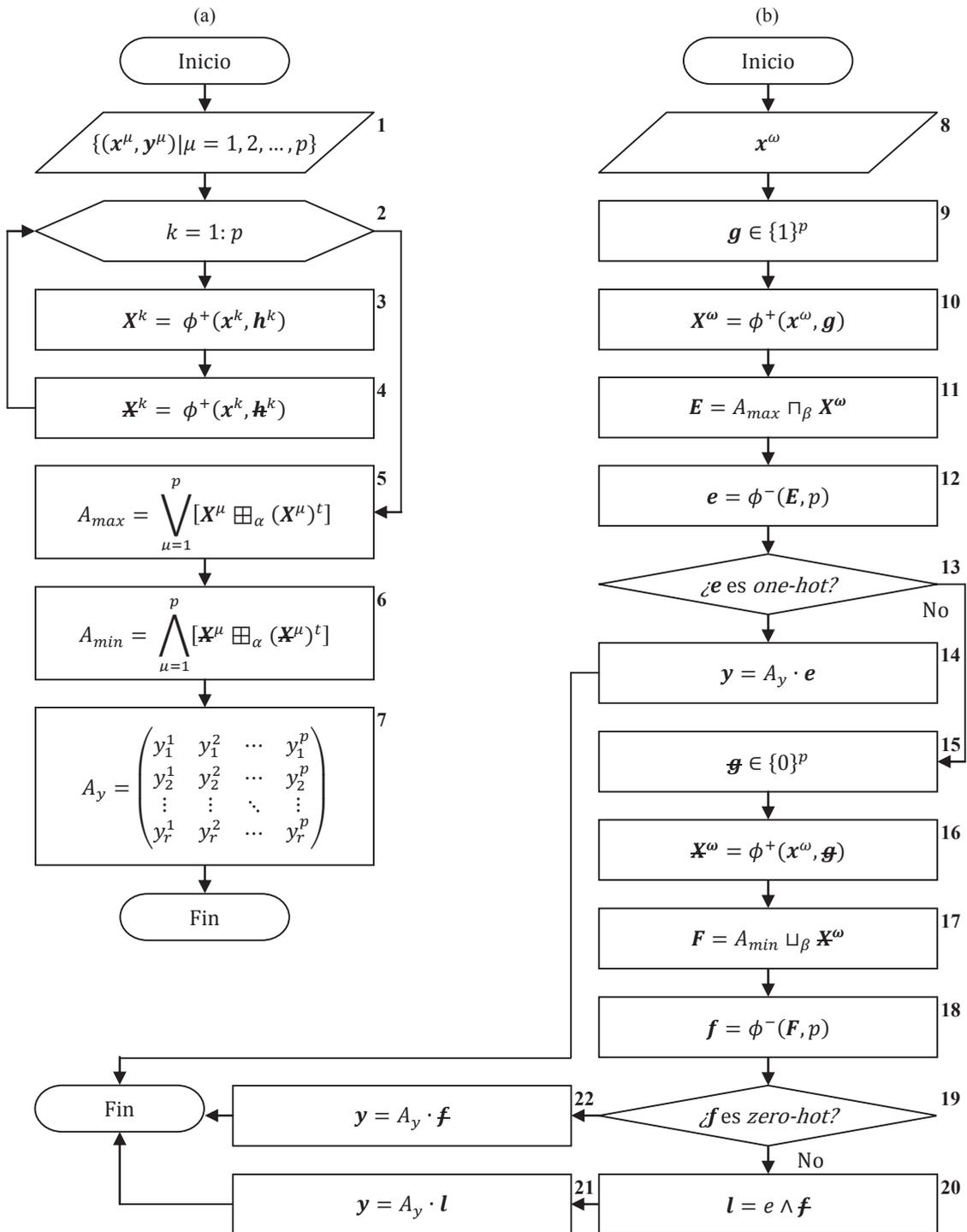


Fig. 3.5.4 Diagramas de flujo de las fases de los pasos 1 y 2 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta. (a) Fase de aprendizaje. (b) Fase de reconocimiento.

1. Datos de entrada.- Se inicia el flujo con los datos del conjunto fundamental.
2. Iteración.- Repetir p veces el procedimiento 3 y 4 para cada valor diferente de k antes de continuar con el procedimiento 5.

3. Procedimiento.- Aplicar la transformada de expansión vectorial $\phi^+(\mathbf{x}^k, \mathbf{h}^k) = \mathbf{X}^k \in V^{s+p}$, donde $\mathbf{x}^k \in V^s$ es el k -ésimo patrón del conjunto fundamental y $\mathbf{h}^k \in V^p$ es el k -ésimo patrón *one-hot*.
4. Procedimiento.- Aplicar la transformada de expansión vectorial $\phi^+(\mathbf{x}^k, \mathbf{h}^k) = \mathbf{X}^k \in V^{s+p}$, donde $\mathbf{x}^k \in V^s$ es el k -ésimo patrón del conjunto fundamental y $\mathbf{h}^k \in V^p$ es el k -ésimo patrón *zero-hot*.
5. Procedimiento.- Con el conjunto fundamental $\{(\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ crear una memoria autoasociativa alfa-beta *max* (A_{max}).
6. Procedimiento.- Con el conjunto fundamental $\{(\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ crear una memoria autoasociativa alfa-beta *min* (A_{min}).
7. Procedimiento.- A partir de los patrones de salida del conjunto fundamental construir la matriz A_y utilizando la expresión (3.17). Fin del flujo.

Los números del 1 al 7 anteriores corresponden con el flujo de la fase de aprendizaje del diagrama mostrado en la figura (3.5.4); los restantes, del 8 al 22 presentados a continuación, corresponden con el flujo de la fase de reconocimiento.

8. Datos de entrada.- Se comienza el flujo con el patrón \mathbf{x}^ω como entrada.
9. Procedimiento.- Construir el patrón $\mathbf{g} \in \{1\}^p$.
10. Procedimiento.- Aplicar la transformada de expansión vectorial $\phi^+(\mathbf{x}^\omega, \mathbf{g})$ para generar el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{s+p}$.
11. Procedimiento.- Realizar la operación $A_{max} \cap_\beta \mathbf{X}^\omega$ para obtener un patrón $\mathbf{E} \in V^{s+p}$.
12. Procedimiento.- Aplicar la transformada de contracción vectorial al patrón \mathbf{E} , tal que $\phi^-(\mathbf{E}, p) = \mathbf{e} \in V^p$.
13. Decisión.- Si el patrón \mathbf{e} conseguido es *one-hot* entonces continuar con el procedimiento 14, de lo contrario seguir con el procedimiento 15.
14. Procedimiento.- Efectuar la operación $A_y \cdot \mathbf{e}$ para conseguir un patrón \mathbf{y} como salida. Fin del flujo.
15. Procedimiento.- Construir el patrón $\mathbf{g} \in \{0\}^p$, que es el patrón negado de \mathbf{g} .
16. Procedimiento.- Aplicar la transformada de expansión vectorial $\phi^+(\mathbf{x}^\omega, \mathbf{g})$ para generar el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{s+p}$.
17. Procedimiento.- Realizar la operación $A_{min} \cap_\beta \mathbf{X}^\omega$ para obtener un patrón $\mathbf{F} \in V^{s+p}$.
18. Procedimiento.- Aplicar la transformada de contracción vectorial al patrón \mathbf{F} , tal que $\phi^-(\mathbf{F}, p) = \mathbf{f} \in V^p$.
19. Decisión.- Si el patrón \mathbf{f} conseguido es *zero-hot* entonces continuar con el procedimiento 22, de lo contrario seguir con el procedimiento 20.
20. Procedimiento.- Realizar la operación lógica *AND* (cuyo operador es denotado como \wedge) entre los componentes de \mathbf{e} y \mathbf{f} para conseguir un patrón $\mathbf{l} \in V^p$, donde \mathbf{f} es el patrón negado de \mathbf{f} , de manera que cada componente $l_{\tilde{n}} = e_{\tilde{n}} \wedge \bar{f}_{\tilde{n}}$ para $1 \leq \tilde{n} \leq p$.
21. Procedimiento.- Efectuar la operación $A_y \cdot \mathbf{l}$ para conseguir un patrón \mathbf{y} como salida. Fin del flujo.
22. Procedimiento.- Efectuar la operación $A_y \cdot \bar{\mathbf{f}}$ para conseguir un patrón \mathbf{y} como salida, donde $\bar{\mathbf{f}}$ es el patrón negado de \mathbf{f} . Fin del flujo.

Dado que los pasos tres y cuatro son similares a los dos primeros pasos, únicamente se presentan los diagramas de la fase aprendizaje y la fase de reconocimiento en la figura (3.5.5) en la cual se describe el flujo de la dirección opuesta a la mostrada en la figura

(3.5.4). En caso de requerir una consulta extra acerca de la *BAM* alfa-beta, la información contenida en esta sección (3.5) —la descripción y las definiciones que se presentan— se puede hallar en la referencia [23].

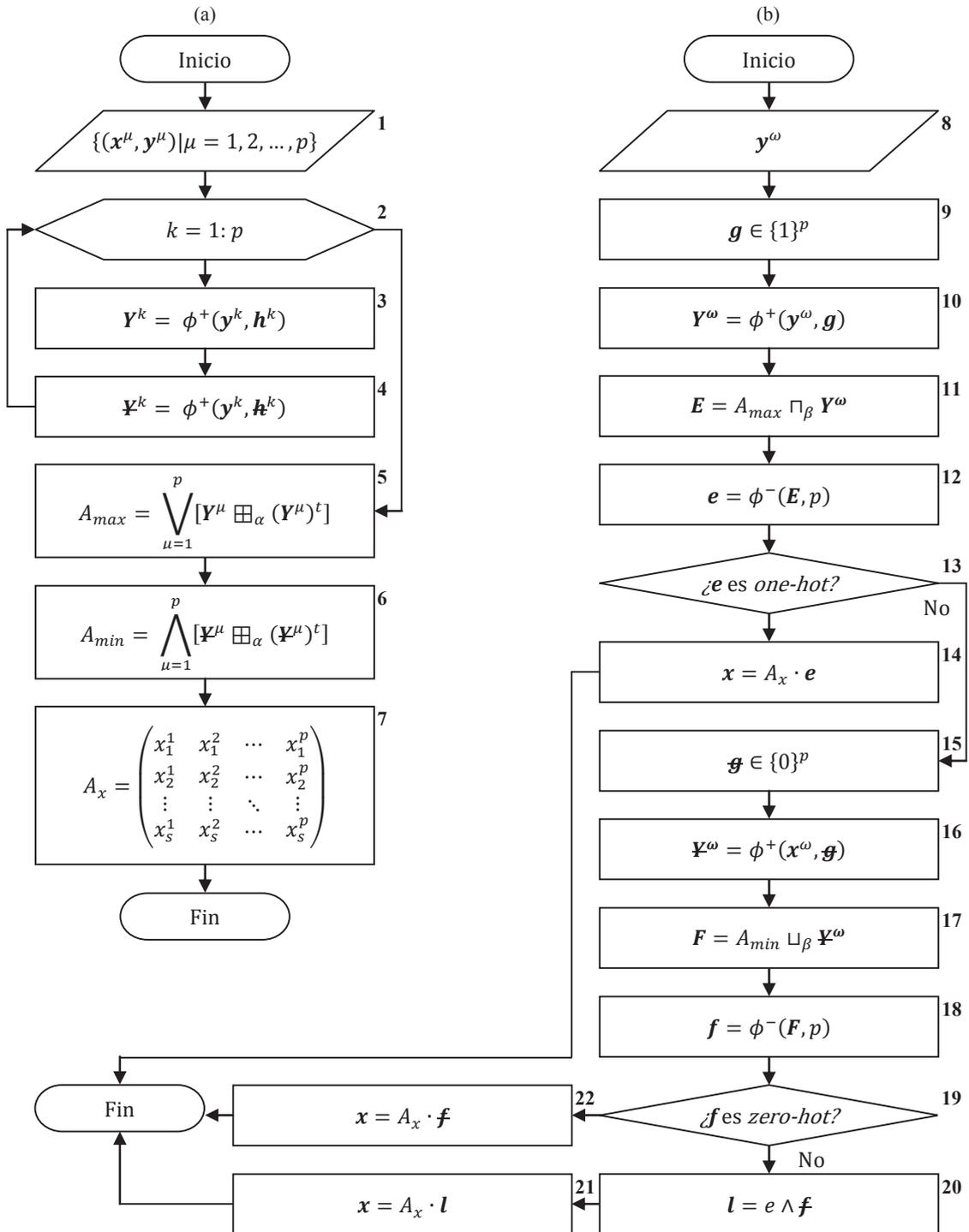


Fig. 3.5.5 Diagramas de flujo de las fases de los pasos 3 y 4 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta. (a) *Fase de aprendizaje*. (b) *Fase de reconocimiento*.

CAPÍTULO 4

Modelo Propuesto

En seguida se describe la propuesta de este trabajo de tesis, estableciendo primeramente los pasos que la componen e ilustrando éstos con ejemplos. Además de presentar la complejidad en tiempo y espacio de esta idea y que ha sido nombrada modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

4.1 Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado

El modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado establece el conjunto fundamental como $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ donde $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r$, con $V = \{0, 1\}$, $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$. Asimismo, al igual que la *BAM* alfa-beta, este modelo propuesto simplificado consta de cuatro pasos, dos de ellos recuperan un patrón de salida \mathbf{y} -idealmente igual a \mathbf{y}^ω - cuando se presenta un patrón de entrada \mathbf{x}^ω tal que con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, y los dos restantes recuperan un patrón de entrada \mathbf{x} -de modo ideal igual a \mathbf{x}^ω - cuando se presenta un patrón de salida \mathbf{y}^ω , es decir, logra operar en dos direcciones con dos pasos cada una, como se esquematiza en la figura (3.5.1) del capítulo anterior.

4.1.1 Pasos 1 y 2: dirección que recupera y dado \mathbf{x}^ω

Como anteriormente se menciona, el objetivo de los dos primeros pasos es recuperar un patrón de salida \mathbf{y} a partir de un patrón de entrada \mathbf{x}^ω , y para lograrlo se construyen dos matrices, cada una relacionada con cada paso. La construcción de estas matrices y su operación dado un patrón de entrada \mathbf{x}^ω , corresponden con la fase de aprendizaje y reconocimiento respectivamente del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado descritos a continuación.

Fase de aprendizaje.- Se utiliza la transformada vectorial de expansión dimensional para obtener los patrones $\mathbf{X}^\mu \in V^{s+p} \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, dados cada uno de los patrones $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de p bits \mathbf{h}^μ , de modo que, $\phi^+(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{h}^\mu) = \mathbf{X}^\mu$. Así, con el conjunto fundamental $\{(\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ se crea una memoria autoasociativa alfa-beta *max* (A_{max}) relacionada únicamente con el primer paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, empleando la expresión (3.13) del capítulo anterior con este último conjunto fundamental, consiguiendo la expresión siguiente (4.1) también presentada por primera vez, pero no numerada, en el capítulo 3.

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^p [\mathbf{X}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{X}^\mu)^t] \quad (4.1)$$

Para concluir la fase de aprendizaje, se construye una matriz A de orden $r \times p$ relacionada solamente con el segundo paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Tal matriz A de orden $r \times p$ (esto significa que $m = r$ y $n = p$), tiene un valor inicial de cero en sus componentes $a_{ij} \forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, que son actualizados con cada uno de los patrones $\mathbf{y}^\mu \in V^r$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de p bits \mathbf{h}^μ aplicando la regla $a_{ij} + \Delta_{y} a_{ij}$ donde $\Delta_{y} a_{ij}$ es definido en la expresión (4.2) -aportación de este trabajo de tesis- que es una modificación de la regla perteneciente a la fase de aprendizaje de la *lernmatrix* de Steinbuch.

$$\Delta_{y} a_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon & \text{si } h_j^\mu = 1 = y_i^\mu \\ -\varepsilon & \text{si } h_j^\mu = 1 \text{ y } y_i^\mu = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.2)$$

Siendo ε una constante positiva elegida con anterioridad, comúnmente con valor igual a 1.

Fase de reconocimiento.- Dado un patrón de entrada \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, construir el vector $\mathbf{g} \in \{1\}^p$ para aplicar la transformada vectorial de expansión dimensional $\phi^+(\mathbf{x}^\omega, \mathbf{g})$ y obtener el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{s+p}$. Con lo anterior, realizar la operación $A_{max} \sqcap \beta \mathbf{X}^\omega$ para obtener un patrón $\mathbf{E} \in V^{s+p}$ y aplicar la transformada vectorial de contracción dimensional al patrón \mathbf{E} , tal que $\phi^-(\mathbf{E}, p) = \mathbf{e} \in V^p$.

Finalmente en esta fase de reconocimiento, se obtiene un patrón de salida $\mathbf{y} \in V^r$, donde el i -ésimo componente de este patrón se logra de acuerdo con la expresión siguiente, siendo V el operador que obtiene el valor máximo de una serie de valores, y a_{ij} cada componente de la matriz A del segundo paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^p (a_{ij} \cdot e_j) = \bigvee_{h=1}^r \left[\sum_{j=1}^p (a_{hj} \cdot e_j) \right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.3)$$

A fin de presentar de forma concreta, la relación entre las matrices construidas en la fase de aprendizaje y la operación de éstas dado un patrón de entrada \mathbf{x}^ω , se presenta el siguiente esquema.

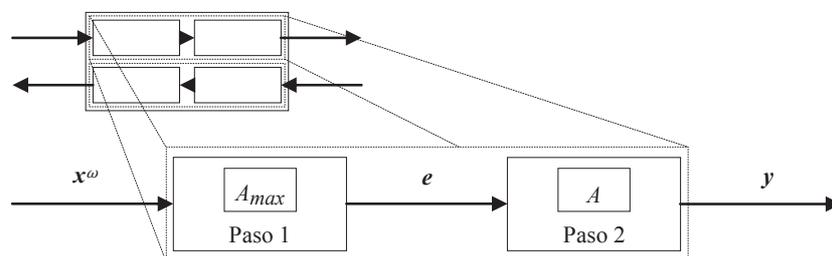


Fig. 4.1.1 Esquema del paso 1 y 2 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificada.

4.1.2 Pasos 3 y 4: dirección que recupera x dado y^ω

Equivalentemente que los dos primeros pasos y utilizando dos matrices relacionadas cada una con cada paso, el objetivo de los dos últimos pasos es recuperar un patrón a partir de otro, sólo que esta vez, se recupera un patrón de entrada x a partir de un patrón de salida y^ω como se muestra en la figura (4.1.2). Por lo tanto, la construcción de estas matrices y su operación dado un patrón de salida y^ω , también corresponden con la fase de aprendizaje y reconocimiento respectivamente del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, detalladas éstas en los siguientes párrafos.

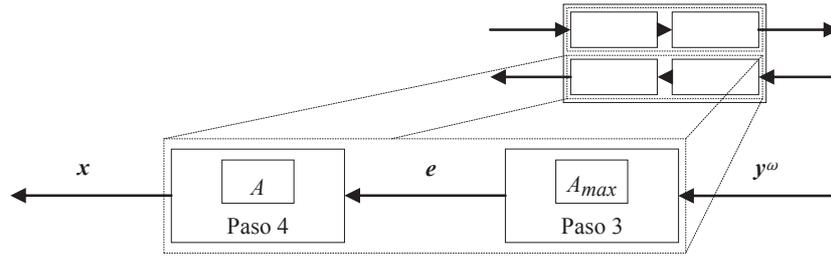


Fig. 4.1.2 Esquema del paso 3 y 4 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificada.

Fase de aprendizaje.- Se ocupa la transformada vectorial de expansión dimensional para obtener los patrones $Y^\mu \in V^{r+p} \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, dados cada uno de los patrones $y^\mu \in V^r$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de p bits h^μ , de modo que, $\phi^+(y^\mu, h^\mu) = Y^\mu$. Así, con el conjunto fundamental $\{(Y^\mu, Y^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ se crea una memoria autoasociativa alfa-beta *max* (A_{max}) relacionada únicamente con el tercer paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, empleando la expresión (3.13) del capítulo anterior con este último conjunto fundamental, consiguiendo la expresión siguiente (4.4) también mostrada por primera vez, pero no numerada, en el capítulo anterior.

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^p [Y^\mu \boxplus_\alpha (Y^\mu)^t] \quad (4.4)$$

Para concluir la fase de aprendizaje, se construye una matriz A de orden $s \times p$ relacionada únicamente con el cuarto paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Tal matriz A de orden $s \times p$ (esto significa que $m = s$ y $n = p$), tiene un valor inicial de cero en sus componentes $a_{ij} \forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, que son actualizados con cada uno de los patrones $x^\mu \in V^s$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de p bits h^μ aplicando la regla $a_{ij} + \Delta_x a_{ij}$ donde $\Delta_x a_{ij}$ es definido en la expresión (4.5) -aportación de este trabajo de tesis- que es además una modificación de la regla perteneciente a la fase de aprendizaje de la *lernmatrix* de Steinbuch.

$$\Delta_x a_{ij} = \begin{cases} +\varepsilon \text{ si } h_j^\mu = 1 = x_i^\mu \\ -\varepsilon \text{ si } h_j^\mu = 1 \text{ y } x_i^\mu = 0 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (4.5)$$

Siendo ε una constante positiva elegida con anterioridad, comúnmente con valor igual a 1.

Fase de reconocimiento.- Dado un patrón de salida \mathbf{y}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, construir el vector $\mathbf{g} \in \{1\}^p$ para aplicar la transformada vectorial de expansión dimensional $\phi^+(\mathbf{y}^\omega, \mathbf{g})$ y obtener el patrón $\mathbf{Y}^\omega \in V^{r+p}$. Con lo anterior, realizar la operación $A_{max} \Pi_\beta \mathbf{Y}^\omega$ para obtener un patrón $\mathbf{E} \in V^{r+p}$ y aplicar la transformada vectorial de contracción dimensional al patrón \mathbf{E} , tal que $\phi^-(\mathbf{E}, p) = \mathbf{e} \in V^p$.

Por último, en esta fase de reconocimiento, se obtiene un patrón de salida $\mathbf{x} \in V^s$, donde el i -ésimo componente de este patrón se logra de acuerdo con la expresión siguiente, siendo V el operador que obtiene el valor máximo de una serie de valores, y a_{ij} cada componente de la matriz A del cuarto paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^p (a_{ij} \cdot e_j) = \bigvee_{h=1}^s \left[\sum_{j=1}^p (a_{hj} \cdot e_j) \right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.6)$$

4.1.3 Ejemplo ilustrativo

Para ilustrar el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, ya descrito éste, se establecen tres pares de patrones arbitrarios que integran el conjunto fundamental, de forma que los patrones representados con la letra minúscula remarcada \mathbf{x} tienen una dimensión con valor igual a 5, y los patrones identificados con la letra minúscula remarcada \mathbf{y} , un valor igual a 4.

Para dar a entender de otro modo lo que se ha expresado en el párrafo anterior, se tiene que $p = 3$, $s = 5$ y $r = 4$ de manera que $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3\}$ donde $\mathbf{x}^\mu \in V^5$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^4$, con $V = \{0, 1\}$.

Por otro lado, para este ejemplo, y cumpliendo lo establecido, se destinan arbitrariamente los patrones que siguen, e inmediatamente después se expresa la fase de aprendizaje de los cuatro pasos que componen el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, seguido de la fase de reconocimiento correspondiente.

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.1.3.1 Fase de Aprendizaje

Se obtiene el conjunto fundamental $\{(\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3\}$ tomando cada uno de los patrones $\mathbf{x}^\mu \in V^5$ del conjunto fundamental original y su respectivo vector *one-hot* de 3 bits \mathbf{h}^μ , de modo que, $\phi^+(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{h}^\mu) = \mathbf{X}^\mu$. Los vectores *one-hot* mencionados son mostrados a continuación seguidos del conjunto fundamental conseguido.

$$\mathbf{h}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con el conjunto fundamental recién creado, se obtiene la memoria autoasociativa alfa-beta $max (A_{max})$.

$$\mathbf{X}^1 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{X}^1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^2 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{X}^2)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^3 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{X}^3)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^3 [\mathbf{X}^{\mu} \boxplus_{\alpha} (\mathbf{X}^{\mu})^t] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se crea la matriz A de orden 4×3 (esto significa que $m = r = 4$ y $n = p = 3$), con un valor inicial de cero en sus componentes $a_{ij} \forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$, que después son actualizados como se indica a continuación empleando cada uno de los

patrones $\mathbf{y}^\mu \in V^4$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de 3 bits \mathbf{h}^μ , aplicando la regla $a_{ij} + \Delta_x a_{ij}$ donde $\Delta_x a_{ij}$ es definido en la expresión (4.2).

Matriz A inicial.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Primera actualización usando $\mathbf{y}^1 \in V^4$ y \mathbf{h}^1 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^1 = 1 \\ y_2^1 = 1 \\ y_3^1 = 0 \\ y_4^1 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^1 = 1 & h_2^1 = 0 & h_3^1 = 0 \\ \begin{pmatrix} a_{11} = \varepsilon & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = \varepsilon & a_{22} = 0 & a_{23} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = 0 & a_{33} = 0 \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = 0 & a_{43} = 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Segunda actualización empleando $\mathbf{y}^2 \in V^4$ y \mathbf{h}^2 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^2 = 0 \\ y_2^2 = 0 \\ y_3^2 = 1 \\ y_4^2 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^2 = 0 & h_2^2 = 1 & h_3^2 = 0 \\ \begin{pmatrix} a_{11} = \varepsilon & a_{12} = -\varepsilon & a_{13} = 0 \\ a_{21} = \varepsilon & a_{22} = -\varepsilon & a_{23} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = \varepsilon & a_{33} = 0 \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = -\varepsilon & a_{43} = 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Tercera y última actualización utilizando $\mathbf{y}^3 \in V^4$ y \mathbf{h}^3 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^3 = 0 \\ y_2^3 = 1 \\ y_3^3 = 0 \\ y_4^3 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^3 = 0 & h_2^3 = 0 & h_3^3 = 1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} = \varepsilon & a_{12} = -\varepsilon & a_{13} = -\varepsilon \\ a_{21} = \varepsilon & a_{22} = -\varepsilon & a_{23} = \varepsilon \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = \varepsilon & a_{33} = -\varepsilon \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = -\varepsilon & a_{43} = \varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Las matrices A y A_{max} anteriores corresponden con los dos primeros pasos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, y las matrices relacionadas con los pasos restantes se obtienen del modo que sigue.

Se obtiene el conjunto fundamental $\{(\mathbf{Y}^\mu, \mathbf{Y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3\}$ tomando cada uno de los patrones $\mathbf{y}^\mu \in V^4$ del conjunto fundamental original y su respectivo vector *one-hot* de 3 bits \mathbf{h}^μ , de modo que, $\phi^+(\mathbf{y}^\mu, \mathbf{h}^\mu) = \mathbf{Y}^\mu$.

$$\mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con el conjunto fundamental anterior, se obtiene la memoria autoasociativa alfa-beta *max* (A_{max}) respectiva.

$$\mathbf{Y}^1 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^2 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^2)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^3 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^3)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^3 [\mathbf{Y}^{\mu} \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^{\mu})^t] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se crea la matriz A de orden 5×3 (esto significa que $m = s = 5$ y $n = p = 3$), con un valor inicial de cero en sus componentes $a_{ij} \forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $j \in \{1, 2, 3\}$, que después son actualizados como se indica a continuación empleando cada uno de los patrones $\mathbf{x}^{\mu} \in V^5$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de 3 bits \mathbf{h}^{μ} , aplicando la regla $a_{ij} + \Delta_{\mathbf{x}^{\mu}} a_{ij}$ donde $\Delta_{\mathbf{x}^{\mu}} a_{ij}$ es definido en la expresión (4.5).

Matriz A inicial.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Primera actualización usando $\mathbf{x}^1 \in V^5$ y \mathbf{h}^1 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} x_1^1 = 1 \\ x_2^1 = 0 \\ x_3^1 = 0 \\ x_4^1 = 0 \\ x_5^1 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^1 = 1 & h_2^1 = 0 & h_3^1 = 0 \\ \begin{pmatrix} a_{11} = \varepsilon & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = 0 & a_{23} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = 0 & a_{33} = 0 \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = 0 & a_{43} = 0 \\ a_{51} = \varepsilon & a_{52} = 0 & a_{53} = 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Segunda actualización empleando $\mathbf{x}^2 \in V^5$ y \mathbf{h}^2 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} x_1^2 = 1 \\ x_2^2 = 1 \\ x_3^2 = 0 \\ x_4^2 = 0 \\ x_5^2 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^2 = 0 & h_2^2 = 1 & h_3^2 = 0 \\ \begin{pmatrix} a_{11} = \varepsilon & a_{12} = \varepsilon & a_{13} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = \varepsilon & a_{23} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = -\varepsilon & a_{33} = 0 \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = -\varepsilon & a_{43} = 0 \\ a_{51} = \varepsilon & a_{52} = -\varepsilon & a_{53} = 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Tercera y última actualización utilizando $\mathbf{x}^3 \in V^5$ y \mathbf{h}^3 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} x_1^3 = 0 \\ x_2^3 = 0 \\ x_3^3 = 1 \\ x_4^3 = 1 \\ x_5^3 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^3 = 0 & h_2^3 = 0 & h_3^3 = 1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} = \varepsilon & a_{12} = \varepsilon & a_{13} = -\varepsilon \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = \varepsilon & a_{23} = -\varepsilon \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = -\varepsilon & a_{33} = \varepsilon \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = -\varepsilon & a_{43} = \varepsilon \\ a_{51} = \varepsilon & a_{52} = -\varepsilon & a_{53} = -\varepsilon \end{pmatrix} \end{matrix}$$

En resumen, las matrices obtenidas relacionadas con los dos primeros pasos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado que recuperan un patrón \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω , tomando el conjunto fundamental de este ejemplo, son las siguientes.

$$A_{max} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Después, se presentan las matrices obtenidas relacionadas con los dos pasos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado que recuperan un patrón \mathbf{x} dado \mathbf{y}^ω , también utilizando el conjunto fundamental de este ejemplo.

$$A_{max} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Con la obtención de estas últimas cuatro matrices, se finaliza la fase de aprendizaje del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

4.1.3.2 Fase de Reconocimiento

Para continuar con el ejemplo e iniciar con la fase de recuperación, se construye el vector $\mathbf{g} \in \{1\}^3$.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Correspondiente con la dirección que recupera un patrón \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω tal que $\omega \in \{1, 2, 3\}$, se aplica la transformada vectorial de expansión usando un patrón \mathbf{x}^ω y el vector \mathbf{g} , para obtener el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{5+3}$. Ejemplificando, se toma arbitrariamente el patrón de entrada \mathbf{x}^1 para aplicar la transformada vectorial de expansión dimensional $\phi^+(\mathbf{x}^1, \mathbf{g})$ y así conseguir el patrón $\mathbf{X}^1 \in V^8$.

$$\mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo anterior, se realiza la operación $A_{max} \sqcap_\beta \mathbf{X}^1$ para obtener un patrón $\mathbf{E} \in V^8$, donde A_{max} es la memoria autoasociativa alfa-beta relacionada con el primer paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_\beta \mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicar la transformada vectorial de contracción dimensional al patrón \mathbf{E} , tal que $\phi^-(\mathbf{E}, 3) = \mathbf{e} \in V^3$.

$$\mathbf{e} = \phi^-(\mathbf{E}, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene un patrón de salida $\mathbf{y} \in V^4$ del siguiente modo con ayuda de la expresión (4.3), empleando la matriz A del segundo paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El patrón \mathbf{y} obtenido es igual al patrón \mathbf{y}^1 , por lo tanto, este patrón resultante de la fase de reconocimiento es el correcto, porque está asociado con el patrón de entrada \mathbf{x}^1 .

La fase de reconocimiento dado el patrón de entrada \mathbf{x}^1 está concluida, pero para ilustrar mejor el funcionamiento de este modelo, se realiza la fase de reconocimiento con los patrones restantes de esta dirección e inmediatamente después, la fase de reconocimiento con los patrones de la dirección faltante (dirección que recupera un patrón \mathbf{x} dado \mathbf{y}^ω tal que $\omega \in \{1, 2, 3\}$).

Así como se hizo para conseguir el patrón $\mathbf{X}^1 \in V^8$, se obtienen los patrones \mathbf{X}^2 y \mathbf{X}^3 , con los patrones \mathbf{x}^2 y \mathbf{x}^3 respectivamente y el vector $\mathbf{g} \in \{1\}^3$.

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La obtención de $\mathbf{E} \in V^8$, $\mathbf{e} \in V^3$ y $\mathbf{y} \in V^4$ correspondiente con la fase de reconocimiento, dado el patrón \mathbf{X}^2 , se presenta a continuación.

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_{\beta} \mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La finalización de la fase de reconocimiento, dado el patrón \mathbf{X}^3 , también se presenta.

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_{\beta} \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la fase de recuperación de la dirección que utiliza las matrices de los pasos tres y cuatro, con los patrones respectivos se describe en los párrafos que siguen.

Primeramente, se obtienen los patrones \mathbf{Y}^1 , \mathbf{Y}^2 y \mathbf{Y}^3 , con los patrones \mathbf{y}^1 , \mathbf{y}^2 y \mathbf{y}^3 respectivamente y el vector $\mathbf{g} \in \{1\}^3$; sólo que esta vez, a diferencia de los patrones \mathbf{X}^1 , \mathbf{X}^2 y \mathbf{X}^3 , los patrones conseguidos pertenecen a V^7 .

$$\mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aquí se muestra la manera de obtener $\mathbf{E} \in V^7$, $\mathbf{e} \in V^3$ y $\mathbf{x} \in V^5$ con el patrón \mathbf{Y}^1 .

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_{\beta} \mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Después se presenta el modo correspondiente de obtener también $\mathbf{E} \in V^7$, $\mathbf{e} \in V^3$ y $\mathbf{x} \in V^5$ con el patrón \mathbf{Y}^2 .

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_{\beta} \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, a partir del patrón \mathbf{Y}^3 se crea el patrón resultante $\mathbf{x} \in V^5$.

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_{\beta} \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.2 Modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado

Tomando como base, lo establecido en el primer párrafo de la sección (4.1), se propone un modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y especificado a continuación, el cual cambia respecto del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado por el tipo de memorias construidas relacionadas con el paso uno y tres, así como la operación de éstas. Además, en la fase de reconocimiento, se adiciona una operación vectorial correspondiente con el paso uno, y otra operación vectorial correspondiente con el paso tres, empleando el vector resultante de realizar la operación con la matriz respectiva en cada uno de estos pasos.

4.2.1 Pasos 1 y 2: dirección que recupera y dado x^ω

En seguida, se describen la fase de aprendizaje y reconocimiento del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado correspondiente con la dirección que recupera y dado x^ω , es decir, con los dos primeros pasos.

Fase de aprendizaje.- Se usa la transformada vectorial de expansión dimensional para conseguir los patrones $\mathbf{X}^\mu \in V^{s+p} \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, dados cada uno de los patrones $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *zero-hot* de p bits \mathbf{h}^μ , de modo que, $\phi^+(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{h}^\mu) = \mathbf{X}^\mu$. Así, con el conjunto fundamental $\{(\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ se crea una memoria autoasociativa alfa-beta *min* (A_{min}) relacionada únicamente con el primer paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, empleando la expresión (3.13) del capítulo anterior con este último conjunto fundamental, consiguiendo la expresión siguiente (4.7) no numerada en el capítulo 3, donde fue presentada inicialmente.

$$A_{min} = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{X}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{X}^\mu)^t] \quad (4.7)$$

Posteriormente, en esta fase de aprendizaje, se crea una matriz A de orden $r \times p$ relacionada sólo con el segundo paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, de la misma manera como se construye en el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Por esta motivo, la matriz A tiene las mismas características y usa las mismas expresiones para su construcción que la matriz construida en tal modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado en el mismo paso.

Fase de reconocimiento.- Proporcionado un patrón de entrada \mathbf{x}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, construir el vector $\mathbf{g} \in \{0\}^p$ para aplicar la transformada vectorial de expansión dimensional $\phi^+(\mathbf{x}^\omega, \mathbf{g})$ y obtener el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{s+p}$. Ulteriormente, realizar la operación $A_{min} \boxplus_\beta \mathbf{X}^\omega$ para tener un patrón $\mathbf{F} \in V^{s+p}$ y aplicarle la transformada vectorial de contracción dimensional, tal que $\phi^-(\mathbf{F}, p) = \mathbf{f} \in V^p$, con el objetivo de conseguir como resultado el patrón negado de \mathbf{f} referido como $\bar{\mathbf{f}}$.

Una vez hecho lo anterior en esta fase de reconocimiento, se obtiene un patrón de salida $\mathbf{y} \in V^r$, de modo que el i -ésimo componente de este patrón se logra de acuerdo con la expresión que sigue, siendo \vee el operador que consigue el valor máximo de una serie de valores, y a_{ij} cada componente de la matriz A del segundo paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^p (a_{ij} \cdot \bar{f}_j) = \bigvee_{h=1}^r \left[\sum_{j=1}^p (a_{hj} \cdot \bar{f}_j) \right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.8)$$

Para concretar lo recién descrito de acuerdo con la fase de aprendizaje y reconocimiento, se presenta el siguiente esquema.

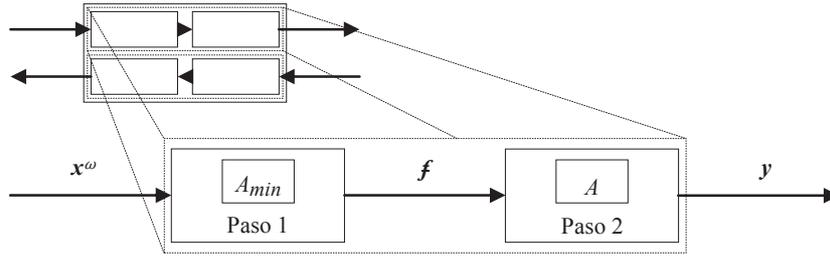


Fig. 4.2.1 Esquema del paso 1 y 2 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificada alternativa.

4.2.2 Pasos 3 y 4: dirección que recupera x dado y^ω

La representación gráfica del paso tres y cuatro del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado se muestra a continuación, seguido de la descripción de la fase de aprendizaje y reconocimiento de este modelo correspondiente con la dirección que recupera x dado y^ω .

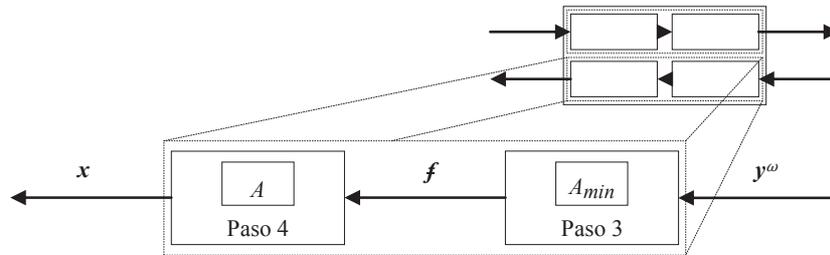


Fig. 4.2.2 Esquema del paso 3 y 4 de una memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificada alternativa.

Fase de aprendizaje.- Se aplica la transformada vectorial de expansión dimensional para conseguir los patrones $\mathbf{Y}^\mu \in V^{r+p} \forall \mu \in \{1, 2, \dots, p\}$, dados cada uno de los patrones $\mathbf{y}^\mu \in V^r$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *zero-hot* de p bits \mathbf{h}^μ , de modo que, $\phi^+(\mathbf{y}^\mu, \mathbf{h}^\mu) = \mathbf{Y}^\mu$. Así, con el conjunto fundamental $\{(\mathbf{Y}^\mu, \mathbf{Y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ se crea una memoria autoasociativa alfa-beta *min* (A_{min}) relacionada únicamente con el tercer paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, empleando la expresión (3.13) del capítulo anterior con este último conjunto fundamental, consiguiendo la expresión siguiente (4.9) no numerada en este capítulo antecesor, donde fue presentada inicialmente.

$$A_{min} = \bigwedge_{\mu=1}^p [\mathbf{Y}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{Y}^\mu)^t] \quad (4.9)$$

Inmediatamente, en esta fase de aprendizaje, se crea una matriz A de orden $r \times p$ relacionada sólo con el cuarto paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, de la misma manera como se construye en el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Por esta razón, en el mismo paso, la matriz A tiene las mismas características y usa las mismas expresiones para su construcción que la matriz construida en tal modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

Fase de reconocimiento.- Dado un patrón de entrada \mathbf{y}^ω con $\omega \in \{1, 2, \dots, p\}$, construir el vector $\mathbf{g} \in \{0\}^p$ para aplicar la transformada vectorial de expansión dimensional $\phi^+(\mathbf{y}^\omega, \mathbf{g})$ y obtener el patrón $\mathbf{Y}^\omega \in V^{r+p}$. Posteriormente, realizar la operación $A_{\min} \sqcup \beta \mathbf{Y}^\omega$ para tener un patrón $\mathbf{F} \in V^{r+p}$ y aplicarle la transformada vectorial de contracción dimensional, tal que $\phi^-(\mathbf{F}, p) = \mathbf{f} \in V^p$, con el objetivo de conseguir como resultado el patrón negado de \mathbf{f} referido como $\bar{\mathbf{f}}$.

Continuando con la fase de reconocimiento, se obtiene un patrón de salida $\mathbf{x} \in V^s$, de modo que el i -ésimo componente de este patrón se logra de acuerdo con la expresión que sigue, siendo \mathcal{V} el operador que consigue el valor máximo de una serie de valores, y a_{ij} cada componente de la matriz A del segundo cuarto del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{j=1}^p (a_{ij} \cdot f_j) = \mathcal{V}_{h=1}^s \left[\sum_{j=1}^p (a_{hj} \cdot f_j) \right] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.10)$$

4.2.3 Ejemplo ilustrativo

El ejemplo que ahora se presenta para ilustrar el modelo alternativo bidireccional simplificado, establece el mismo conjunto fundamental con los mismos valores que el ejemplo anterior para iniciar con la fase de aprendizaje, es decir, se tiene que $p = 3$, $s = 5$ y $r = 4$ tal que $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3\}$ donde $\mathbf{x}^\mu \in V^5$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^4$, con $V = \{0, 1\}$.

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.2.3.1 Fase de Aprendizaje

Se obtiene el conjunto fundamental $\{(\mathbf{X}^\mu, \mathbf{h}^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3\}$ tomando cada uno de los patrones $\mathbf{x}^\mu \in V^5$ del conjunto fundamental original y su respectivo vector *zero-hot* de 3 bits \mathbf{h}^μ , de modo que, $\phi^+(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{h}^\mu) = \mathbf{X}^\mu$. Los vectores *zero-hot* mencionados son mostrados a continuación seguidos del conjunto fundamental conseguido.

$$\mathbf{h}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con el conjunto fundamental recién creado, se obtiene la memoria autoasociativa alfa-beta $min(A_{min})$.

$$\mathbf{x}^1 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^2 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^2)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^3 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^3)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{min} = \bigwedge_{\mu=1}^3 [\mathbf{x}^{\mu} \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^{\mu})^t] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A_{min} corresponde con el primer paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Por otro lado, relacionada exclusivamente con el paso dos del modelo alternativo bidireccional simplificado, se crea la matriz A de orden 4×3 (esto significa que $m = r = 4$ y $n = p = 3$), cuya actualización de componentes es idéntica que la actualización de la matriz A , también del paso dos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Las matrices relacionadas con los pasos restantes se obtienen del modo que sigue.

Se obtiene el conjunto fundamental $\{(\mathbf{y}^{\mu}, \mathbf{z}^{\mu}) \mid \mu = 1, 2, 3\}$ tomando cada uno de los patrones $\mathbf{y}^{\mu} \in V^4$ del conjunto fundamental original y su respectivo vector *zero-hot* de 3 bits \mathbf{z}^{μ} , de modo que, $\phi^+(\mathbf{y}^{\mu}, \mathbf{z}^{\mu}) = \mathbf{z}^{\mu}$.

$$\mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con el conjunto fundamental anterior, se obtiene la memoria autoasociativa alfa-beta *min* (A_{min}) respectiva.

$$\mathbf{Y}^1 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^2 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^2)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y}^3 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^3)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{min} = \bigwedge_{\mu=1}^3 [\mathbf{Y}^{\mu} \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^{\mu})^t] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A de orden 5×3 (esto significa que $m = s = 5$ y $n = p = 3$) del último paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado es igual a la matriz del último paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

En resumen, las matrices obtenidas relacionadas con los dos primeros pasos del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado que recuperan un patrón y dado \mathbf{x}^{ω} , tomando el conjunto fundamental de este ejemplo, son las siguientes.

$$A_{min} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Después, se presentan las matrices obtenidas relacionadas con los dos pasos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado que recuperan un patrón \mathbf{x} dado \mathbf{y}^ω , también utilizando el conjunto fundamental de este ejemplo.

$$A_{min} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Con la obtención de estas últimas cuatro matrices, se finaliza la fase de aprendizaje del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

4.2.3.2 Fase de Reconocimiento

Para continuar con el ejemplo e iniciar con la fase de recuperación, se construye el vector $\mathbf{g} \in \{0\}^3$.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Correspondiente con la dirección que recupera un patrón \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω tal que $\omega \in \{1, 2, 3\}$, se aplica la transformada vectorial de expansión usando un patrón \mathbf{x}^ω y el vector \mathbf{g} , para obtener el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{5+3}$. Ejemplificando, se toma arbitrariamente el patrón de entrada \mathbf{x}^1 para aplicar la transformada vectorial de expansión dimensional $\phi^+(\mathbf{x}^1, \mathbf{g})$ y así conseguir el patrón $\mathbf{X}^1 \in V^8$.

$$\mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo anterior, se realiza la operación $A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{X}^1$ para obtener un patrón $\mathbf{F} \in V^8$, donde A_{min} es la memoria autoasociativa alfa-beta relacionada con el primer paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicar la transformada vectorial de contracción dimensional al patrón \mathbf{F} , tal que $\phi^-(\mathbf{F}, 3) = \mathbf{f} \in V^3$, con el objetivo de conseguir \mathbf{f} .

$$\mathbf{f} = \phi^-(\mathbf{F}, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene un patrón de salida $\mathbf{y} \in V^4$ del siguiente modo con ayuda de la expresión (4.8), empleando la matriz A del segundo paso del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El patrón \mathbf{y} obtenido es igual al patrón \mathbf{y}^1 , por lo tanto, este patrón resultante de la fase de reconocimiento es el correcto, porque está asociado con el patrón de entrada \mathbf{x}^1 .

La fase de reconocimiento dado el patrón de entrada \mathbf{x}^1 está finalizada, pero para ilustrar mejor el funcionamiento de este modelo, se realiza la fase de reconocimiento con los patrones restantes de esta dirección e inmediatamente después, la fase de reconocimiento con los patrones de la dirección faltante (dirección que recupera un patrón \mathbf{x} dado \mathbf{y}^{ω} tal que $\omega \in \{1, 2, 3\}$).

Así como se hizo para conseguir el patrón $\mathbf{X}^1 \in V^8$, se obtienen los patrones \mathbf{X}^2 y \mathbf{X}^3 , con los patrones \mathbf{x}^2 y \mathbf{x}^3 respectivamente y el vector $\mathbf{g} \in \{0\}^3$.

$$\mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La obtención de $\mathbf{F} \in V^8$, $\mathbf{f} \in V^3$ y $\mathbf{y} \in V^4$ correspondiente con la fase de reconocimiento, dado el patrón \mathbf{X}^2 , se presenta a continuación.

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \phi^{-}(\mathbf{F}, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La finalizaci3n de la fase de reconocimiento, dado el patr3n \mathbf{X}^3 , tambi3n se presenta.

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \phi^{-}(\mathbf{F}, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la fase de recuperaci3n de la direcci3n que utiliza las matrices de los pasos tres y cuatro, con los patrones respectivos se describe en los p3rrafos que siguen.

Primeramente, se obtienen los patrones \mathbf{Y}^1 , \mathbf{Y}^2 y \mathbf{Y}^3 , con los patrones \mathbf{y}^1 , \mathbf{y}^2 y \mathbf{y}^3 respectivamente y el vector $\mathbf{g} \in \{0\}^3$; s3lo que esta vez, a diferencia de los patrones \mathbf{X}^1 , \mathbf{X}^2 y \mathbf{X}^3 , los patrones conseguidos pertenecen a V^7 .

$$\mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aqu3 se muestra la manera de obtener $\mathbf{F} \in V^7$, $\mathbf{f} \in V^3$ y $\mathbf{x} \in V^5$ con el patr3n \mathbf{Y}^1 .

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \phi^{-}(\mathbf{F}, 3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Después se presenta el modo correspondiente de obtener también $\mathbf{F} \in V^7$, $\mathbf{f} \in V^3$ y $\mathbf{x} \in V^5$ con el patrón \mathbf{Y}^2 .

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \phi^{-}(\mathbf{F}, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, a partir del patrón \mathbf{Y}^3 se crea el patrón resultante $\mathbf{x} \in V^5$.

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \phi^{-}(\mathbf{F}, 3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado

Se denomina modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, cuando la fase de aprendizaje y reconocimiento para la dirección que recupera \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω es idéntica que las fases de los pasos uno y dos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, y la fase de aprendizaje y reconocimiento para la dirección que recupera \mathbf{x} dado \mathbf{y}^ω es igual a los pasos tres y cuatro del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

En otro caso, también se denomina modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, cuando la fase de aprendizaje y reconocimiento para la dirección que recupera \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω es idéntica que las fases de los pasos uno y dos del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, y la fase de aprendizaje y reconocimiento para la dirección que recupera \mathbf{x} dado \mathbf{y}^ω es igual a los pasos tres y cuatro del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

4.3.1 Ejemplo ilustrativo

Sólo se ilustra en esta parte el segundo caso descrito en el párrafo anterior del modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, y en esta ocasión, a diferencia de los dos ejemplos anteriores se define el conjunto fundamental que sigue, destinando arbitrariamente los patrones, donde $p = 4$, $s = 5$ y $r = 3$ de manera que $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3, 4\}$ donde $\mathbf{x}^\mu \in V^5$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^3$, con $V = \{0, 1\}$.

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.3.1.1 Fase de Aprendizaje

Se obtiene el conjunto fundamental $\{(\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3, 4\}$ tomando cada uno de los patrones $\mathbf{x}^\mu \in V^5$ del conjunto fundamental original y su respectivo vector *zero-hot* de 4 bits \mathbf{h}^μ , de modo que, $\phi^+(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{h}^\mu) = \mathbf{X}^\mu$. Los vectores *zero-hot* mencionados son mostrados a continuación seguidos del conjunto fundamental conseguido.

$$\mathbf{h}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con el conjunto fundamental recién creado, se obtiene la memoria autoasociativa alfa-beta $\min(A_{\min})$.

$$\mathbf{x}^1 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^2 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^2)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^3 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^3)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^4 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{x}^4)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{min} = \bigwedge_{\mu=1}^4 [\mathbf{x}^\mu \boxplus_\alpha (\mathbf{x}^\mu)^t] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se crea la matriz A de orden 3×4 (esto significa que $m = r = 3$ y $n = p = 4$), con un valor inicial de cero en sus componentes $a_{ij} \forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, que después son actualizados como se indica a continuación empleando cada uno de los patrones $\mathbf{y}^\mu \in V^3$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de 4 bits \mathbf{h}^μ , aplicando la regla $a_{ij} + \Delta_{\mathbf{x}} a_{ij}$ donde $\Delta_{\mathbf{x}} a_{ij}$ es definido en la expresión (4.2).

Matriz A inicial.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Primera actualización usando $\mathbf{y}^1 \in V^3$ y \mathbf{h}^1 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^1 = 1 \\ y_2^1 = 0 \\ y_3^1 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^1 = 1 & h_2^1 = 0 & h_3^1 = 0 & h_4^1 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = 0 & a_{23} = 0 & a_{24} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = 0 & a_{33} = 0 & a_{34} = 0 \end{matrix}$$

Segunda actualización empleando $\mathbf{y}^2 \in V^3$ y \mathbf{h}^2 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^2 = 0 \\ y_2^2 = 0 \\ y_3^2 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^2 = 0 & h_2^2 = 1 & h_3^2 = 0 & h_4^2 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = -\varepsilon & a_{13} = 0 & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = -\varepsilon & a_{23} = 0 & a_{24} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = \varepsilon & a_{33} = 0 & a_{34} = 0 \end{matrix}$$

Tercera y penúltima actualización tomando $\mathbf{y}^3 \in V^3$ y \mathbf{h}^3 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^3 = 0 \\ y_2^3 = 1 \\ y_3^3 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^3 = 0 & h_2^3 = 0 & h_3^3 = 1 & h_4^3 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = -\varepsilon & a_{13} = -\varepsilon & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = -\varepsilon & a_{23} = \varepsilon & a_{24} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = \varepsilon & a_{33} = -\varepsilon & a_{34} = 0 \end{matrix}$$

Cuarta y última actualización utilizando $\mathbf{y}^4 \in V^3$ y \mathbf{h}^4 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^4 = 0 \\ y_2^4 = 1 \\ y_3^4 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^4 = 0 & h_2^4 = 0 & h_3^4 = 0 & h_4^4 = 1 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = -\varepsilon & a_{13} = -\varepsilon & a_{14} = -\varepsilon \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = -\varepsilon & a_{23} = \varepsilon & a_{24} = \varepsilon \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = \varepsilon & a_{33} = -\varepsilon & a_{34} = \varepsilon \end{matrix}$$

Las matrices A y A_{max} anteriores corresponden con los dos primeros pasos del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, y las matrices relacionadas con los pasos restantes, corresponden los pasos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Estas últimas matrices se obtienen del modo que sigue.

Se obtiene el conjunto fundamental $\{(Y^\mu, Y^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3, 4\}$ tomando cada uno de los patrones $y^\mu \in V^3$ del conjunto fundamental original y su respectivo vector *one-hot* de 4 bits h^μ , de modo que, $\phi^+(y^\mu, h^\mu) = Y^\mu$.

$$Y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con el conjunto fundamental anterior, se obtiene la memoria autoasociativa alfa-beta *max* (A_{max}) respectiva.

$$Y^1 \boxplus_\alpha (Y^1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_\alpha (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^2 \boxplus_\alpha (Y^2)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_\alpha (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^3 \boxplus_\alpha (Y^3)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_\alpha (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y^4 \boxplus_\alpha (Y^4)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_\alpha (0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^4 [\mathbf{Y}^\mu \boxplus_{\alpha} (\mathbf{Y}^\mu)^t] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se crea la matriz A de orden 5×4 (esto significa que $m = s = 5$ y $n = p = 4$), con un valor inicial de cero en sus componentes $a_{ij} \forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, que después son actualizados como se indica a continuación empleando cada uno de los patrones $\mathbf{x}^\mu \in V^5$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de 4 bits \mathbf{h}^μ , aplicando la regla $a_{ij} + \Delta_{\mathbf{x}} a_{ij}$ donde $\Delta_{\mathbf{x}} a_{ij}$ es definido en la expresión (4.5).

Matriz A inicial.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Primera actualización usando $\mathbf{x}^1 \in V^5$ y \mathbf{h}^1 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} x_1^1 = 1 \\ x_2^1 = 0 \\ x_3^1 = 0 \\ x_4^1 = 0 \\ x_5^1 = 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^1 = 1 & h_2^1 = 0 & h_3^1 = 0 & h_4^1 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = 0 & a_{23} = 0 & a_{24} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = 0 & a_{33} = 0 & a_{34} = 0 \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = 0 & a_{43} = 0 & a_{44} = 0 \\ a_{51} = \varepsilon & a_{52} = 0 & a_{53} = 0 & a_{54} = 0 \end{matrix}$$

Segunda actualización empleando $\mathbf{x}^2 \in V^5$ y \mathbf{h}^2 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} x_1^2 = 1 \\ x_2^2 = 1 \\ x_3^2 = 0 \\ x_4^2 = 0 \\ x_5^2 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^2 = 0 & h_2^2 = 1 & h_3^2 = 0 & h_4^2 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = \varepsilon & a_{13} = 0 & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = \varepsilon & a_{23} = 0 & a_{24} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = -\varepsilon & a_{33} = 0 & a_{34} = 0 \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = -\varepsilon & a_{43} = 0 & a_{44} = 0 \\ a_{51} = \varepsilon & a_{52} = -\varepsilon & a_{53} = 0 & a_{54} = 0 \end{matrix}$$

Tercera y penúltima actualización tomando $\mathbf{x}^3 \in V^5$ y \mathbf{h}^3 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} x_1^3 = 0 \\ x_2^3 = 0 \\ x_3^3 = 1 \\ x_4^3 = 1 \\ x_5^3 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^3 = 0 & h_2^3 = 0 & h_3^3 = 1 & h_4^3 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = \varepsilon & a_{13} = -\varepsilon & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = \varepsilon & a_{23} = -\varepsilon & a_{24} = 0 \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = -\varepsilon & a_{33} = \varepsilon & a_{34} = 0 \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = -\varepsilon & a_{43} = \varepsilon & a_{44} = 0 \\ a_{51} = \varepsilon & a_{52} = -\varepsilon & a_{53} = -\varepsilon & a_{54} = 0 \end{matrix}$$

Cuarta y última actualización utilizando $\mathbf{x}^4 \in V^5$ y \mathbf{h}^4 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} x_1^3 = 0 \\ x_2^3 = 1 \\ x_3^3 = 0 \\ x_4^3 = 1 \\ x_5^3 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^4 = 0 & h_2^4 = 0 & h_3^4 = 0 & h_4^4 = 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} = \varepsilon & a_{12} = \varepsilon & a_{13} = -\varepsilon & a_{14} = -\varepsilon \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = \varepsilon & a_{23} = -\varepsilon & a_{24} = \varepsilon \\ a_{31} = -\varepsilon & a_{32} = -\varepsilon & a_{33} = \varepsilon & a_{34} = -\varepsilon \\ a_{41} = -\varepsilon & a_{42} = -\varepsilon & a_{43} = \varepsilon & a_{44} = \varepsilon \\ a_{51} = \varepsilon & a_{52} = -\varepsilon & a_{53} = -\varepsilon & a_{54} = -\varepsilon \end{pmatrix}$$

En resumen, las matrices obtenidas relacionadas con los dos primeros pasos del modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado que recuperan un patrón \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω , tomando el conjunto fundamental de este ejemplo, son las siguientes.

$$A_{min} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Después, se presentan las matrices obtenidas relacionadas con los dos pasos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado que recuperan un patrón \mathbf{x} dado \mathbf{y}^ω , también utilizando el conjunto fundamental de este ejemplo.

$$A_{max} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Con la obtención de estas últimas cuatro matrices, se finaliza la fase de aprendizaje del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

4.3.1.2 Fase de Reconocimiento

Para continuar con el ejemplo e iniciar con la fase de recuperación, se construye el vector $\mathbf{g} \in \{0\}^4$.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Correspondiente con la dirección que recupera un patrón \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω tal que $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}$, se aplica la transformada vectorial de expansión usando un patrón \mathbf{x}^ω y el vector \mathbf{g} , para obtener el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{\delta+4}$. Ejemplificando, se toma arbitrariamente el patrón de entrada \mathbf{x}^1 para aplicar la transformada vectorial de expansión dimensional $\phi^+(\mathbf{x}^1, \mathbf{g})$ y así conseguir el patrón $\mathbf{X}^1 \in V^9$.

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo anterior, se realiza la operación $A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{x}^1$ para obtener un patrón $\mathbf{F} \in V^9$, donde A_{min} es la memoria autoasociativa alfa-beta relacionada con el primer paso del modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicar la transformada vectorial de contracción dimensional al patrón \mathbf{F} , tal que $\phi^-(\mathbf{F}, 4) = \mathbf{f} \in V^4$, para conseguir \mathbf{f} .

$$\mathbf{f} = \phi^-(\mathbf{F}, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene un patrón de salida $\mathbf{y} \in V^3$ del siguiente modo con ayuda de la expresión (4.8), empleando la matriz A del segundo paso del modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El patrón \mathbf{y} obtenido es igual al patrón \mathbf{y}^1 , por lo tanto, este patrón resultante de la fase de reconocimiento es el correcto, porque está asociado con el patrón de entrada \mathbf{x}^1 .

La fase de reconocimiento dado el patrón de entrada \mathbf{x}^1 está concluida, pero para ilustrar mejor el funcionamiento de este modelo, se realiza la fase de reconocimiento con los patrones restantes de esta dirección e inmediatamente después, la fase de reconocimiento con los patrones de la dirección faltante (dirección que recupera un patrón \mathbf{x} dado \mathbf{y}^{ω} tal que $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}$).

Así como se hizo para conseguir el patrón $\mathbf{x}^1 \in V^9$, se obtienen los patrones \mathbf{x}^2 , \mathbf{x}^3 y \mathbf{x}^4 , con los patrones \mathbf{x}^2 , \mathbf{x}^3 y \mathbf{x}^4 respectivamente y el vector $\mathbf{g} \in \{0\}^4$.

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La obtención de $\mathbf{F} \in V^9$, $\mathbf{f} \in V^4$ y $\mathbf{y} \in V^3$ correspondiente con la fase de reconocimiento, dado el patrón \mathbf{X}^2 , se presenta a continuación.

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \phi^-(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La finalización de la fase de reconocimiento, dado el patrón \mathbf{X}^3 , también se presenta.

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \phi^-(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para terminar con los patrones relacionados con la dirección que recupera un patrón y dado x^ω tal que $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}$, se muestra la parte final de la fase de reconocimiento, con el patrón \mathbf{X}^4 .

$$\mathbf{F} = A_{min} \sqcup_{\beta} \mathbf{X}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ de modo que } \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, la fase de recuperación de la dirección que utiliza las matrices de los pasos tres y cuatro, con los patrones respectivos se describe en los párrafos que siguen.

Se obtienen los patrones \mathbf{Y}^1 , \mathbf{Y}^2 , \mathbf{Y}^3 y \mathbf{Y}^4 , con los patrones \mathbf{y}^1 , \mathbf{y}^2 , \mathbf{y}^3 y \mathbf{y}^4 respectivamente y el vector $\mathbf{g} \in \{1\}^4$; sólo que esta vez, a diferencia de los patrones \mathbf{X}^1 , \mathbf{X}^2 , \mathbf{X}^3 y \mathbf{X}^4 , los patrones conseguidos pertenecen a V^7 .

$$\mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aquí se muestra la manera de obtener $\mathbf{E} \in V^7$, $\mathbf{e} \in V^4$ y $\mathbf{x} \in V^5$ con el patrón \mathbf{Y}^1 .

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_{\beta} \mathbf{Y}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Después se presenta el modo correspondiente de obtener también $\mathbf{E} \in V^7$, $\mathbf{e} \in V^4$ y $\mathbf{x} \in V^5$ con el patrón \mathbf{Y}^2 .

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_{\beta} \mathbf{Y}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con el patrón \mathbf{Y}^3 la forma de tener $\mathbf{x} \in V^5$ es la siguiente.

$$\mathbf{E} = A_{max} \sqcap_{\beta} \mathbf{Y}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sqcap_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, a partir del patrón \mathbf{Y}^4 se crea el patrón resultante $\mathbf{x} \in V^5$.

$$E = A_{max} \Gamma_{\beta} Y^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e = \phi^{-}(E, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot e = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \\ -\varepsilon \\ \varepsilon \\ -3\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.4 El modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y el modelo alternativo como clasificadores de patrones

Debido a la forma de construcción de la matriz correspondiente con los pasos dos y cuatro del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado o el modelo alternativo, es posible considerar alguna de las direcciones -la dirección que recupera y dado x^{ω} o la dirección que recupera x dado y^{ω} - como un clasificador de patrones donde las clases están representadas por los patrones relacionados con el segundo o cuarto paso según sea el caso. Ya que la clase de cada patrón utilizado en la fase de aprendizaje, se encuentra ordenada en la matriz A de los pasos respectivos, de diferente manera que la clase de cualquier otro patrón, aunque se trate de la misma clase; y la fase de recuperación obtiene un patrón tal que cada componente de éste, idealmente coincide con cada componente de la clase del patrón clasificado, porque elige su valor dependiendo del valor de los componentes con posición específica de las clases de los patrones utilizados en la fase de aprendizaje que coinciden con el patrón que se quiere clasificar.

4.4.1 Ejemplo ilustrativo

Como se ha descrito, este ejemplo tiene la peculiaridad que los patrones de salida están codificados de tal manera que representen una clase a la que pertenece su correspondiente patrón de entrada, por ese motivo, el patrón de salida es igual a otro patrón.

El ejemplo establece que $p = 4$, $s = 5$ y $r = 2$ de manera que $\{(x^{\mu}, y^{\mu}) \mid \mu = 1, 2, 3, 4\}$ donde $x^{\mu} \in V^5$ y $y^{\mu} \in V^2$, con $V = \{0, 1\}$, destinando arbitrariamente los patrones que siguen.

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.4.1.1 Fase de Aprendizaje

Se obtiene el conjunto fundamental $\{(X^\mu, \mathbf{x}^\mu) \mid \mu = 1, 2, 3, 4\}$ tomando cada uno de los patrones $\mathbf{x}^\mu \in V^5$ del conjunto fundamental original y su respectivo vector *one-hot* de 4 bits \mathbf{h}^μ , de modo que, $\phi^+(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{h}^\mu) = X^\mu$. Los vectores *one-hot* mencionados son mostrados a continuación seguidos del conjunto fundamental conseguido.

$$\mathbf{h}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con el conjunto fundamental recién creado, se obtiene la memoria autoasociativa alfa-beta *max* (A_{max}).

$$\mathbf{X}^1 \boxplus_\alpha (\mathbf{X}^1)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_\alpha (1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^2 \boxplus_\alpha (\mathbf{X}^2)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_\alpha (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^3 \boxplus_\alpha (\mathbf{X}^3)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \boxplus_\alpha (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}^4 \boxplus_{\alpha} (\mathbf{X}^4)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \boxplus_{\alpha} (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{max} = \bigvee_{\mu=1}^4 [\mathbf{X}^{\mu} \boxplus_{\alpha} (\mathbf{X}^{\mu})^t] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se crea la matriz A de orden 3×4 (esto significa que $m = r = 3$ y $n = p = 4$), con un valor inicial de cero en sus componentes $a_{ij} \forall i, j$ tal que $i \in \{1, 2, 3\}$ y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, que después son actualizados como se indica a continuación empleando cada uno de los patrones $\mathbf{y}^{\mu} \in V^3$ del conjunto fundamental y su respectivo vector *one-hot* de 4 bits \mathbf{h}^{μ} , aplicando la regla $a_{ij} + \Delta_x a_{ij}$ donde $\Delta_x a_{ij}$ es definido en la expresión (4.2).

Matriz A inicial.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Primera actualización usando $\mathbf{y}^1 \in V^3$ y \mathbf{h}^1 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^1 = 1 \\ y_2^1 = 0 \end{matrix} \begin{matrix} h_1^1 = 1 & h_2^1 = 0 & h_3^1 = 0 & h_4^1 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = 0 & a_{13} = 0 & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = 0 & a_{23} = 0 & a_{24} = 0 \end{matrix}$$

Segunda actualización empleando $\mathbf{y}^2 \in V^3$ y \mathbf{h}^2 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^2 = 0 \\ y_2^2 = 1 \end{matrix} \begin{matrix} h_1^2 = 0 & h_2^2 = 1 & h_3^2 = 0 & h_4^2 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = -\varepsilon & a_{13} = 0 & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = \varepsilon & a_{23} = 0 & a_{24} = 0 \end{matrix}$$

Tercera y penúltima actualización tomando $\mathbf{y}^3 \in V^3$ y \mathbf{h}^3 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^3 = 0 \\ y_2^3 = 1 \end{matrix} \begin{matrix} h_1^3 = 0 & h_2^3 = 0 & h_3^3 = 1 & h_4^3 = 0 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = -\varepsilon & a_{13} = -\varepsilon & a_{14} = 0 \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = \varepsilon & a_{23} = \varepsilon & a_{24} = 0 \end{matrix}$$

Cuarta y última actualización utilizando $\mathbf{y}^4 \in V^3$ y \mathbf{h}^4 .

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ porque } \begin{matrix} y_1^4 = 1 \\ y_2^4 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} h_1^4 = 0 & h_2^4 = 0 & h_3^4 = 0 & h_4^4 = 1 \\ a_{11} = \varepsilon & a_{12} = -\varepsilon & a_{13} = -\varepsilon & a_{14} = \varepsilon \\ a_{21} = -\varepsilon & a_{22} = \varepsilon & a_{23} = \varepsilon & a_{24} = -\varepsilon \end{matrix}$$

Las matrices A y A_{max} siguientes, resultado de realizar los pasos anteriores, corresponden con los dos primeros pasos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, y recuperan un patrón \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω , tomando el conjunto fundamental de este ejemplo.

$$A_{max} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Con la obtención de estas últimas cuatro matrices, se finaliza la fase de aprendizaje del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

4.4.1.2 Fase de Reconocimiento

Para continuar con el ejemplo e iniciar con la fase de recuperación, se construye el vector $\mathbf{g} \in \{1\}^4$.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Correspondiente con la dirección que recupera un patrón \mathbf{y} dado \mathbf{x}^ω tal que $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}$, se aplica la transformada vectorial de expansión usando un patrón \mathbf{x}^ω y el vector \mathbf{g} , para obtener el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{5+4}$. Ejemplificando, se toma arbitrariamente el patrón de entrada \mathbf{x}^1 para aplicar la transformada vectorial de expansión dimensional $\phi^+(\mathbf{x}^1, \mathbf{g})$ y así conseguir el patrón $\mathbf{X}^1 \in V^9$.

$$\mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo anterior, se realiza la operación $A_{max} \Pi_{\beta} \mathbf{X}^1$ para obtener un patrón $\mathbf{E} \in V^9$, donde A_{max} es la memoria autoasociativa alfa-beta relacionada con el primer paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$\mathbf{E} = A_{max} \Pi_{\beta} \mathbf{X}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Pi_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicar la transformada vectorial de contracción dimensional al patrón \mathbf{E} , tal que $\phi^-(\mathbf{E}, 4) = \mathbf{e} \in V^4$.

$$\mathbf{e} = \phi^-(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se obtiene un patrón de salida $\mathbf{y} \in V^3$ del siguiente modo con ayuda de la expresión (4.3), empleando la matriz A del segundo paso del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado.

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El patrón \mathbf{y} obtenido es igual al patrón \mathbf{y}^1 , por lo tanto, este patrón resultante de la fase de reconocimiento es el correcto, porque está asociado con el patrón de entrada \mathbf{x}^1 .

La fase de reconocimiento dado el patrón de entrada \mathbf{x}^1 está concluida, pero para ilustrar mejor el funcionamiento de este modelo, se realiza la fase de reconocimiento con los patrones restantes de esta dirección e inmediatamente después, la fase de reconocimiento con los patrones de la dirección faltante (dirección que recupera un patrón \mathbf{x} dado \mathbf{y}^{ω} tal que $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}$).

Así como se hizo para conseguir el patrón $\mathbf{X}^1 \in V^9$, se obtienen los patrones \mathbf{X}^2 , \mathbf{X}^3 y \mathbf{X}^4 , con los patrones \mathbf{x}^2 , \mathbf{x}^3 y \mathbf{x}^4 respectivamente y el vector $\mathbf{g} \in \{1\}^4$.

$$\mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La obtención de $\mathbf{E} \in V^9$, $\mathbf{e} \in V^4$ y $\mathbf{y} \in V^3$ correspondiente con la fase de reconocimiento, dado el patrón \mathbf{X}^2 , se presenta a continuación.

$$\mathbf{E} = A_{max} \Gamma_{\beta} \mathbf{X}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La finalización de la fase de reconocimiento, dado el patrón \mathbf{X}^3 , también se presenta.

$$\mathbf{E} = A_{max} \Gamma_{\beta} \mathbf{X}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-}(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\varepsilon \\ 2\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para terminar con los patrones relacionados con la dirección que recupera un patrón \mathbf{y} dado \mathbf{x}^{ω} tal que $\omega \in \{1, 2, 3, 4\}$, se muestra la parte final de la fase de reconocimiento, con el patrón \mathbf{X}^4 .

$$\mathbf{E} = A_{max} \Gamma_{\beta} \mathbf{X}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Gamma_{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e} = \phi^{-1}(\mathbf{E}, 4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathbf{e} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & -\varepsilon & \varepsilon \\ -\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como se puede observar en el ejemplo, y tomando en cuenta que los patrones obtenidos indican la clase a la que pertenece el patrón de entrada, se ha clasificado de manera correcta cada patrón de entrada utilizado en la fase de aprendizaje del clasificador.

4.5 Complejidad del algoritmo del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado

Un algoritmo es un conjunto finito de instrucciones precisas para la realización de un cálculo o para resolver un problema [87]. Una medida de la eficiencia es el tiempo usado por la computadora para resolver un problema utilizando un algoritmo dado. Una segunda medida de eficiencia es la cantidad de memoria requerida para implementar el algoritmo cuando los valores de entrada son de un tamaño específico.

El análisis del tiempo requerido para resolver un problema de un tamaño en particular implica la complejidad en tiempo del algoritmo. El análisis de la memoria requerida por la computadora implica la complejidad en espacio del algoritmo.

En las siguientes secciones se presenta la complejidad del algoritmo que presenta el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. En la primera parte, se analiza la complejidad en espacio y en la segunda sección, se muestra la complejidad en tiempo.

4.5.1 Complejidad en espacio

Se necesita una matriz para guardar los p patrones \mathbf{x} de dimensión $s = n$. La matriz tendrá dimensiones de $p \times (n+p)$. En la misma matriz se guardan los patrones de entrada y los vectores añadidos *one-hot* o *zero-hot*, según sea el caso. Dado que los componentes de la matriz pertenecen a $\{-1, 0, 1\}$, entonces estos se representan con variables enteras que ocupan 2 bytes. Por lo tanto, el número total de bytes es igual a $2p(n+p)$.

Se necesita una matriz para guardar los p patrones \mathbf{y} de dimensión $r = m$. La matriz tendrá dimensiones de $(m+p) \times p$. En la misma matriz se guardan los patrones de salida y los vectores añadidos *one-hot* o *zero-hot*, según sea el caso. Dado que los componentes de la matriz pertenecen a $\{-1, 0, 1\}$, entonces estos se representan con variables enteras que ocupan 2 bytes. Por lo tanto, el número total de bytes es igual a $2p(m+p)$.

En la fase de aprendizaje se necesitan 2 matrices. Una para la memoria autoasociativa alfa-beta del primer paso, y otra para la memoria autoasociativa alfa-beta del tercer paso, con dimensiones $(n+p) \times (n+p)$ y $(m+p) \times (m+p)$ respectivamente. Dado que estas matrices

contienen sólo números enteros positivos, entonces los valores de sus componentes se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. Por lo tanto, el número total de bytes es $(n+p)^2+(m+p)^2$

Se utiliza el vector en donde se guarda el vector obtenido después de realizar el paso uno o tres, cuya dimensión es de p . Dado que las componentes del vector toman los valores de 0 y 1, entonces estos valores se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. Por lo tanto, el número total de bytes es p

El total de bytes requeridos para implementar el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado es igual a $2p(n+m+2p)+(n+p)^2+(m+p)^2+p$.

4.5.2 Complejidad en tiempo

Debido a que la complejidad en tiempo de un algoritmo se puede expresar en términos del número de operaciones usadas por el algoritmo cuando la entrada tiene un tamaño en particular. Se analiza el algoritmo de la fase de aprendizaje del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, porque es la parte de todo el algoritmo que requiere de más operaciones elementales.

Para la memoria asociativa bidireccional alfa-beta, la fase de aprendizaje también es la parte del algoritmo que requiere de más operaciones elementales; y éstas, son empleadas en el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado del mismo modo.

Tomando en cuenta lo anterior y que las operaciones utilizadas para medir la complejidad en tiempo pueden ser la comparación de enteros, la suma de enteros, la división de enteros, asignaciones de variables, comparaciones lógicas, o cualquier otra operación elemental; entonces la complejidad en tiempo de la propuesta de esta tesis es igual a la complejidad en tiempo de la memoria asociativa bidireccional alfa-beta: $O(n^2)$.

Para efectos de comparación y comprobación se muestra en un anexo de este documento la complejidad en espacio y tiempo de la memoria asociativa bidireccional alfa-beta, ambas, obtenidas del trabajo original del autor [23].

CAPÍTULO 5

Resultados Obtenidos

En el presente capítulo son mostrados los resultados experimentales obtenidos después de efectuar con bancos de datos específicos las fases de cada uno de los pasos que componen el modelo propuesto en el capítulo antecesor. Presentando también, análisis comparativos con otros modelos referidos en esta tesis.

5.1 Análisis comparativo con el modelo de memoria asociativa bidireccional alfa-beta y el modelo simplificado propuesto

Con el fin de comparar gráficamente, el total de operaciones empleadas en la fase de aprendizaje y reconocimiento del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado respecto del modelo original, se presenta el siguiente diagrama de flujo que describe los dos pasos relacionados con la dirección que recupera y dado \mathbf{x}^ω . Donde el conjunto fundamental de se denota como $\{(\mathbf{x}^\mu, \mathbf{y}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ donde $\mathbf{x}^\mu \in V^s$ y $\mathbf{y}^\mu \in V^r$, con $V = \{0, 1\}$, $p, s, r \in \mathbb{Z}^+$.

1. Datos de entrada.- Se inicia el flujo con los datos del conjunto fundamental.
2. Iteración.- Repetir p veces el procedimiento 3 para cada valor diferente de k antes de continuar con el procedimiento 4.
3. Procedimiento.- Aplicar la transformada de expansión vectorial $\phi^+(\mathbf{x}^k, \mathbf{h}^k) = \mathbf{X}^k \in V^{s+p}$, donde $\mathbf{x}^k \in V^s$ es el k -ésimo patrón del conjunto fundamental y $\mathbf{h}^k \in V^p$ es el k -ésimo patrón *one-hot*.
4. Procedimiento.- Con el conjunto fundamental $\{(\mathbf{X}^\mu, \mathbf{X}^\mu) \mid \mu = 1, 2, \dots, p\}$ crear una memoria autoasociativa alfa-beta *max* (A_{max}).
5. Procedimiento.- Construir la matriz A de orden $r \times p$ cuyos componentes con valor inicial igual a 0 son actualizados utilizando la expresión (4.2), a partir de los patrones de salida del conjunto fundamental y los respectivos vectores *one-hot*. Fin del flujo.

Los números del 1 al 5 anteriores corresponden con el flujo de la fase de aprendizaje del diagrama mostrado en la figura (5.1.1); los restantes, del 6 al 12 presentados a continuación, corresponden con el flujo de la fase de reconocimiento.

6. Datos de entrada.- Se comienza el flujo con el patrón \mathbf{x}^ω como entrada.
7. Procedimiento.- Construir el patrón $\mathbf{g} \in \{1\}^p$.
8. Procedimiento.- Aplicar la transformada de expansión vectorial $\phi^+(\mathbf{x}^\omega, \mathbf{g})$ para generar el patrón $\mathbf{X}^\omega \in V^{s+p}$.
9. Procedimiento.- Realizar la operación $A_{max} \square_{\beta} \mathbf{X}^\omega$ para obtener un patrón $\mathbf{E} \in V^{s+p}$.

10. Procedimiento.- Aplicar la transformada de contracción vectorial al patrón E , tal que $\phi^-(E, p) = e \in V^p$.
11. Procedimiento.- Efectuar la operación $A \cdot e$ para conseguir un patrón como salida de dimensión r .
12. Procedimiento.- Obtener el patrón $y \in V^r$, donde cada componente con valor igual a 1 corresponde con el componente que tiene el valor máximo de los demás componentes del patrón del conseguido en el paso 11. Fin del flujo.

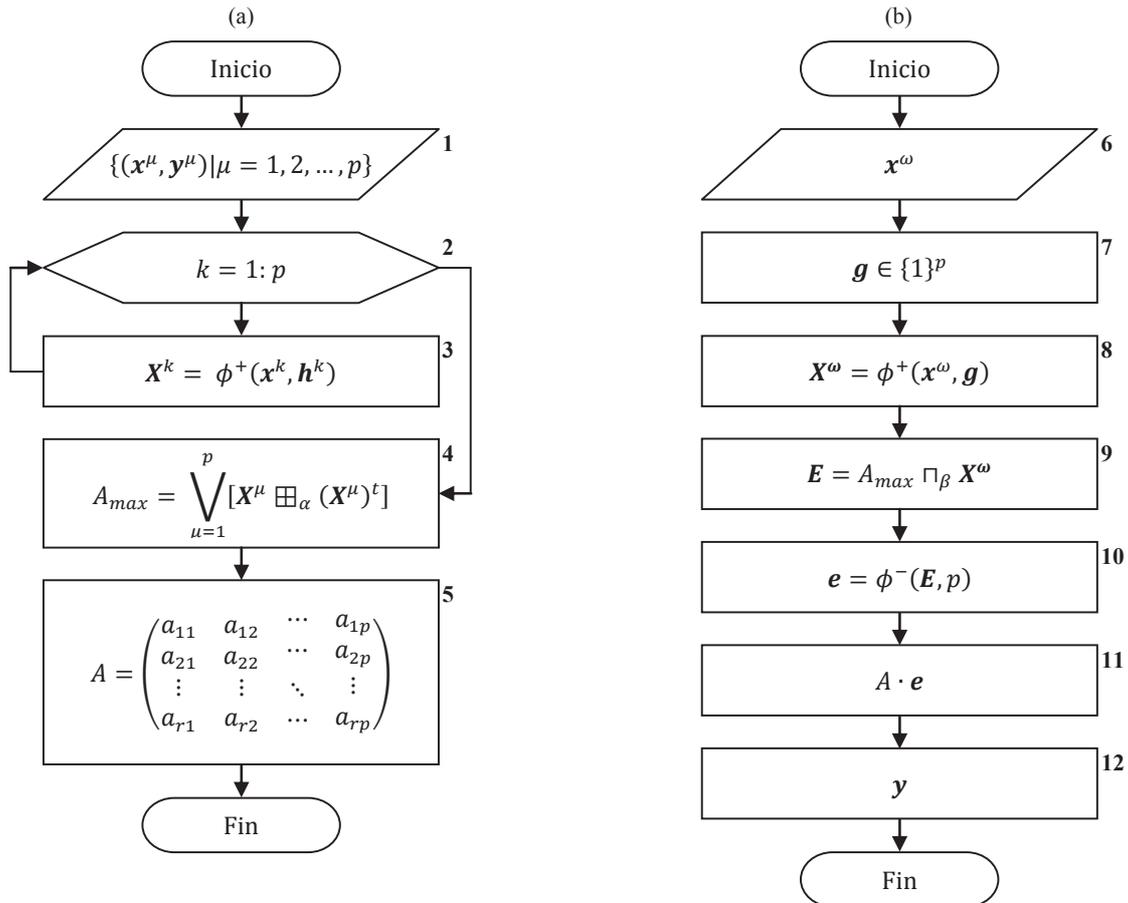


Fig. 5.1.1 Diagramas de flujo de las fases de los pasos 1 y 2 del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. (a) Fase de aprendizaje. (b) Fase de reconocimiento.

Es necesario señalar que los procedimientos marcados con el número 11 y 12 del diagrama anterior, enuncian lo mismo que la expresión (4.2). Sin embargo, para fines de comparación se consideran estos dos procedimientos de esta manera, ya que el procedimiento número 11 realiza la misma operación que el procedimiento número 14, 21 y 22 del diagrama de flujo asociado a la figura (3.5.4), utilizando una matriz y el vector e como argumentos.

Recíprocamente, se muestran los diagramas de flujo de la dirección que recupera x dado y^ω , cuya descripción no se incluye, ya que es similar y con igual correspondencia que la descripción de la dirección que recupera y dado x^ω .

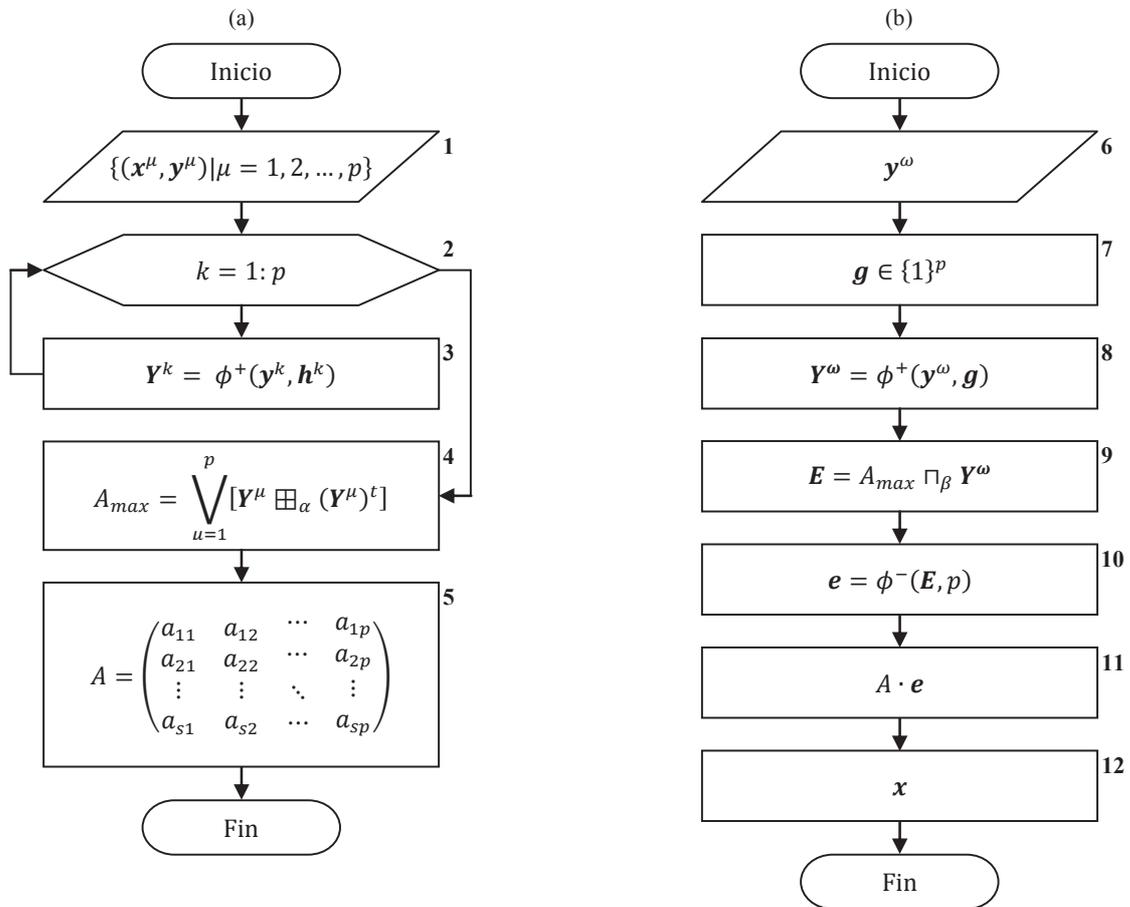


Fig. 5.1.2 Diagramas de flujo de las fases de los pasos 3 y 4 del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. (a) *Fase de aprendizaje*. (b) *Fase de reconocimiento*.

Como final del análisis realizado en esta sección del documento, se muestra una tabla que compara el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y el modelo original, tomando en cuenta diferentes características que ambos modelos poseen.

Característica	Modelo de memoria asociativa bidireccional alfa-beta	Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado
1. Complejidad en tiempo.	$O(n^2)$	$O(n^2)$
2. Complejidad en espacio tomando el byte como unidad de medida.	$p(n+m+2p)+2[(n+p)^2+(m+p)^2]+p$	$2p(n+m+2p)+(n+p)^2+(m+p)^2+p$
3. Recuperación correcta de los patrones del conjunto fundamental.	Garantizada.	No garantizada.
4. Condición que indica que dos o más asociaciones idénticas formen parte del mismo conjunto fundamental.	Sí	No
5. Número de matrices creadas en la fase de aprendizaje.	2 matrices de dimensión $(s+p) \times (s+p)$, 2 matrices de dimensión $(r+p) \times (r+p)$, 1 matriz de dimensión $s \times p$ y otra de $r \times p$.	1 matriz de dimensión $(s+p) \times (s+p)$, 1 matriz de dimensión $(r+p) \times (r+p)$, 1 matriz de dimensión $s \times p$ y otra de $r \times p$.

Tabla 5.1.1 Tabla comparativa entre el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y el modelo original.

5.2 Resultados experimentales

Para la obtención de los resultados presentados en esta sección, se ha desarrollado una aplicación utilizando el lenguaje de programación C++ y la biblioteca QT. Tal aplicación implementa el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado empleando un conjunto de imágenes binarias como conjunto fundamental.

Esta aplicación implementa algunos modelos de memoria asociativa mencionados en el capítulo denominado estado del arte, los cuales se enlistan a continuación y que son utilizados como clasificadores de patrones. El modelo propuesto en esta tesis es usado también como clasificador de patrones, tal y como se describe en la sección (4.4).

- Modelo asociativo *lernmatrix* de Steinbuch
- *Correlograph*.
- Modelo asociativo *linear associator*.
- Modelo asociativo Hopfield
- Memoria morfológica *min*.
- Memoria morfológica *max*.
- Memoria alfa-beta *min*.
- Memoria alfa-beta *max*.

Debido a que el modelo asociativo Hopfield es autoasociativo, entonces de modo ideal sólo puede recuperar el patrón de entrada, lo anterior quiere decir que cada patrón de entrada tiene una clase distinta que es igual a tal patrón de entrada.

Adicionalmente la aplicación contiene otros clasificadores no mencionados hasta ahora en este documento, como el clasificador denominado *k-nearest neighbour (knn)* [88] y el clasificador euclidiano [89], ambos con un enfoque basado en métricas. Así como modelos asociativos cuya idea fue concebida en el Centro de Investigación en Computación (CIC), y

que obtiene resultados competitivos al igual que la propuesta del capítulo anterior al ser usados como clasificadores: el clasificador híbrido asociativo (*CHA*) y el clasificador híbrido asociativo con translación (*CHAT*) [90].

Una de las particularidades de la aplicación es que implementa un método singular de codificación de clases, que se ha especificado en estos experimentos de expansión. Se enlistan a continuación los modelos que tienen este tipo de codificación de clases.

- Modelo asociativo *lernmatrix* de Steinbuch con método de expansión.
- *Correlograph* con método de expansión.
- Modelo asociativo *linear associator* con método de expansión.
- Memoria morfológica *min* con método de expansión.
- Memoria morfológica *max* con método de expansión.
- Memoria alfa-beta *min* con método de expansión.
- Memoria alfa-beta *max* con método de expansión.

El método de expansión para la codificación de clases es propuesto en este documento de tesis para mejorar la efectividad en la fase de reconocimiento de algunos modelos. Tal método asocia un vector *one-hot* a cada patrón de entrada, identificando los componentes con valor igual a 1 de los vectores *one-hot* cuyos patrones de entrada pertenezcan a una misma clase.

Con los patrones de entrada y los vectores *one-hot* como clases se obtiene como resultado un patrón para cada patrón de entrada que idealmente, es el vector *one-hot* de salida correspondiente. Y tomando en cuenta los componentes con valor igual a 1 de este patrón resultante, se contabilizan de modo que la clase a la que pertenece el patrón de entrada es la clase con el mayor número de componentes con tal valor identificados para dicha clase. En caso de que el número mayor de componentes identificados en una clase sea igual a otra, entonces la clase se elige arbitrariamente de entre las clases que tienen el mismo número de componentes identificados.

Con lo descrito anteriormente se continúa primeramente con la presentación de tres experimentos realizados utilizando el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y el alternativo, y como se presentan ambos implícitamente se muestran los resultados que arroja el modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Cada experimento es presentado de forma independiente, y en el último apartado se muestra una comparación entre algunos clasificadores de patrones y la propuesta de esta tesis.

Los experimentos y la comparación que siguen utilizan métodos de validación concretos que permiten tener una referencia de la efectividad de los modelos implementados. El método de validación referido como factor de olvido es utilizado en las secciones posteriores y es especificado en la sección que sigue.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	Y	Z	a	b	c	d	e	c	g	h	i
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
j	k	m	n	ñ	o	p	q	r	s	t	u
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
v	w	x	y	z	1	2	3	4	5	6	7
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
8	9	0	+	-	*	/	%	&	#	=	\$
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
	¡	¿	?	()	{	}				
	73	74	75	76	77	78	79	80			

Fig. 5.2.2 Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del primer experimento, donde cada imagen es un patrón de salida.

Los números que marcan cada imagen de las dos figuras anteriores, indican la correspondencia entre estos dos conjuntos que forman el conjunto fundamental.

Resultado obtenido.- Se recuperan las ciento sesenta imágenes en la dirección respectiva, es decir, ingresando cualquier imagen que pertenece al conjunto fundamental se recupera la imagen asociada correcta correspondiente.

Lo anterior quiere decir que el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, tiene un porcentaje igual a cero denominado factor de olvido, que indica el tanto por ciento de imágenes no recuperadas del número total.

Ejemplos de la aplicación desarrollada y utilizada para la obtención de estos resultados se muestran en las figuras que siguen.

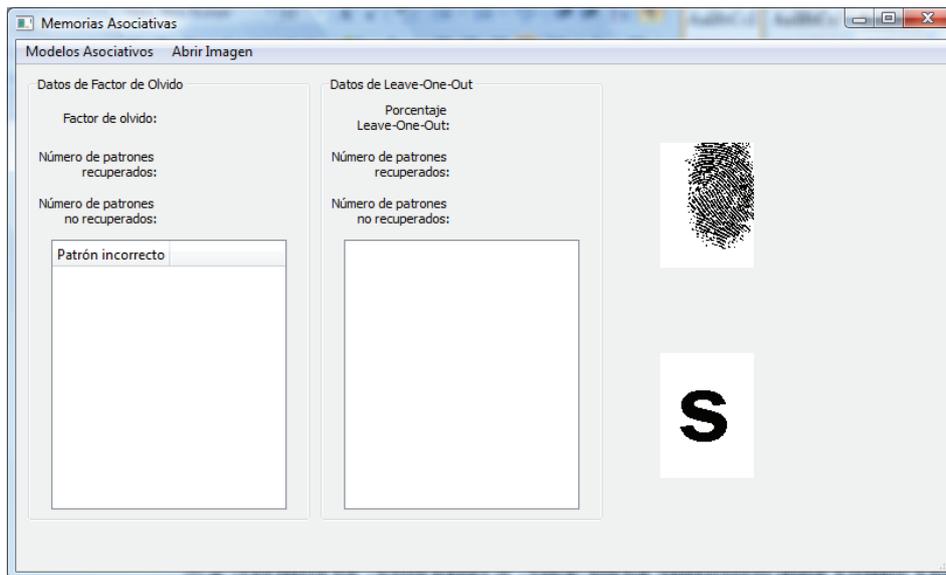


Fig. 5.2.3 Ejemplo 1 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar para recuperar la imagen correspondiente.

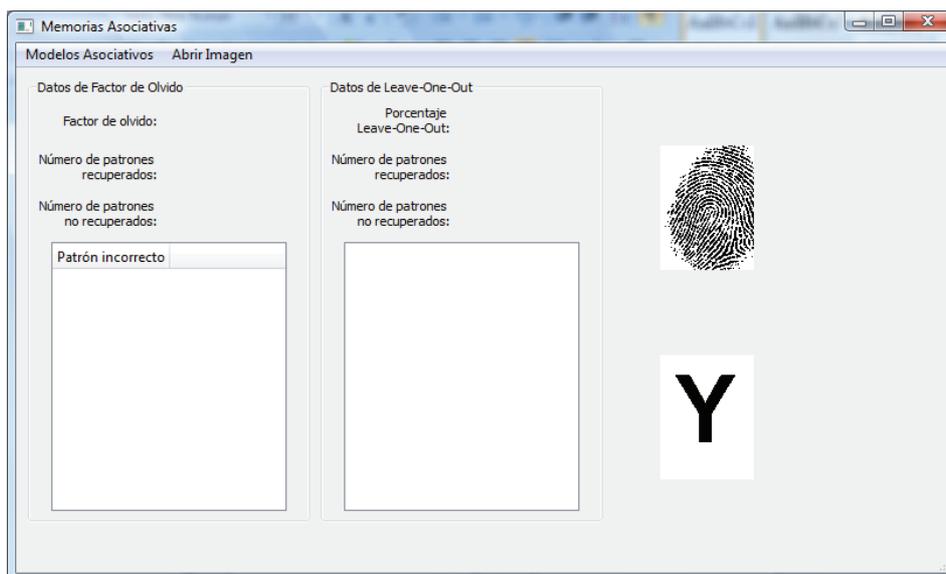


Fig. 5.2.4 Ejemplo 2 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar para recuperar la imagen correspondiente.

Además, se ha comprobado que el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado es robusto a ruido aditivo. Alterando la imagen binaria con este tipo de ruido y utilizándola como entrada en la dirección respectiva de este modelo en la aplicación mencionada.

Resultado obtenido.- Agregando ruido aditivo a cada una de las imágenes del conjunto fundamental, añadiendo de manera uniforme el valor 1 en el 10, 20 y 40 por ciento del patrón de la imagen binaria digital; se recuperan las ciento sesenta imágenes en la dirección respectiva. Es decir, ingresando cualquier imagen que pertenece al conjunto fundamental con el ruido mencionado, se recupera la imagen asociada correcta correspondiente.

Los ejemplos de la aplicación cuando las imágenes de entrada tienen el ruido aditivo descrito, se muestran a continuación.

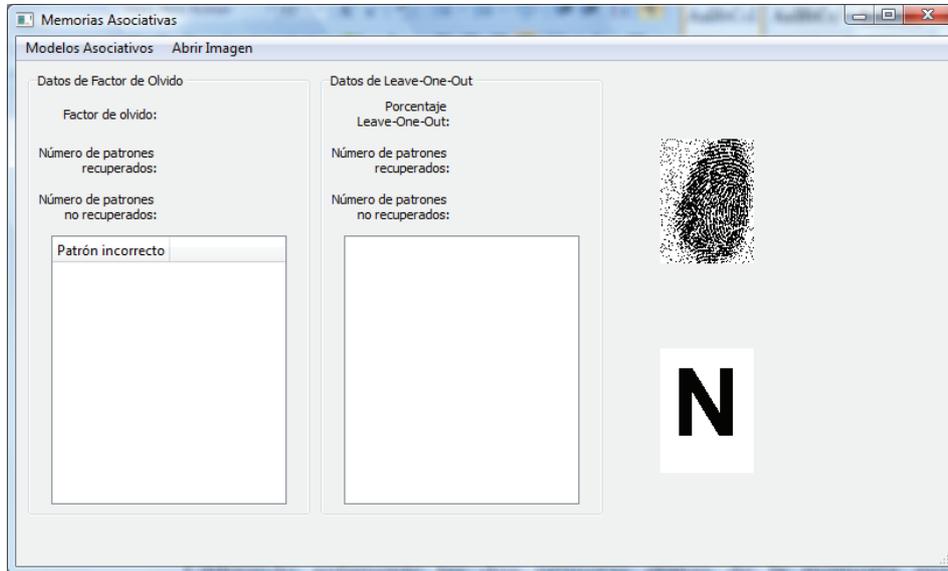


Fig. 5.2.5 Ejemplo 1 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar con ruido aditivo para recuperar la imagen correspondiente.

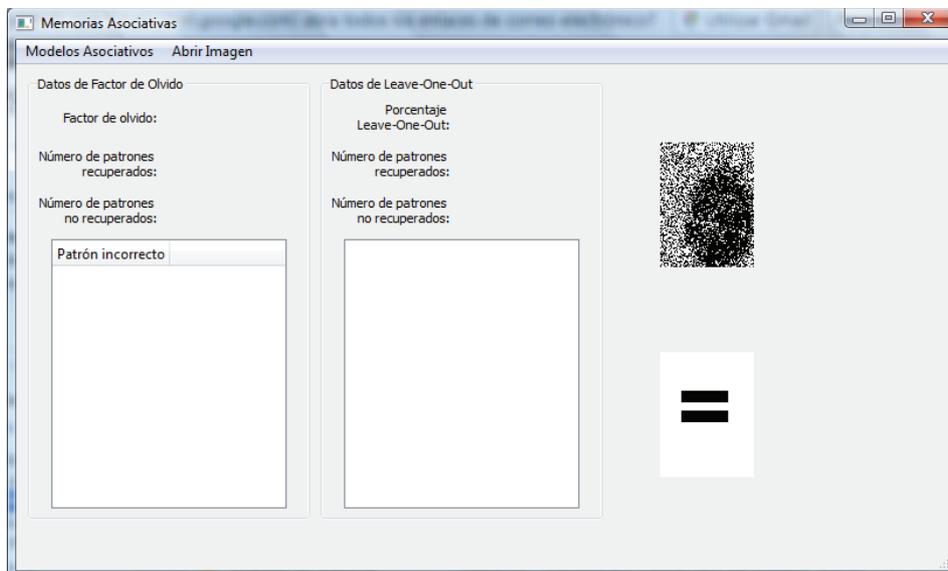


Fig. 5.2.6 Ejemplo 2 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar con ruido aditivo para recuperar la imagen correspondiente.

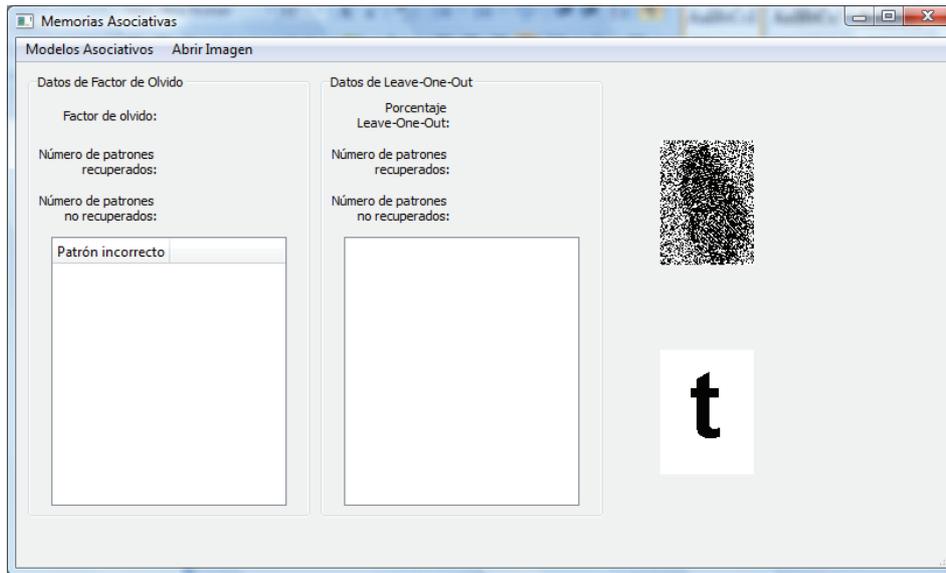


Fig. 5.2.7 Ejemplo 3 de la fase de reconocimiento utilizando la imagen de una huella dactilar con ruido aditivo para recuperar la imagen correspondiente.

Recíprocamente, se ha probado el modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado, obteniéndose los mismos resultados que los conseguidos por el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado. Sólo que en lugar de agregar ruido aditivo a las imágenes binarias digitales, se ha agregado ruido sustractivo, añadiendo de manera uniforme el valor 0 en el 10, 20 y 40 por ciento del patrón de la imagen binaria digital.

Los resultados obtenidos para el modelo híbrido bidireccional asociativo alfa-beta, son iguales que los obtenidos anteriormente, sólo si en la dirección correspondiente con los pasos del modelo bidireccional asociativo alfa-beta se utilizan las mismas imágenes con ruido aditivo, en caso de probar con imágenes con ruido. Y para la dirección correspondiente con los pasos del modelo alternativo bidireccional asociativo alfa-beta se utilizan las mismas imágenes con ruido sustractivo, también en caso de emplear imágenes con ruido.

5.2.2 Segundo experimento: identificador de caracteres griegos

El conjunto fundamental de este ejemplo se muestra en las dos figuras que siguen; la primera, correspondiente con las imágenes de los patrones de entrada, y la segunda, con las imágenes de los patrones de salida. Cada una de tales imágenes contiene un carácter griego, cuya correspondencia entre los patrones de entrada y salida está determinada por los números que identifican a cada imagen.

α 01	β 02	χ 03	δ 04	ε 05	φ 06	γ 07	η 08	ι 09	φ 10
κ 11	λ 12	μ 13	ν 14	ο 15	π 16	θ 17	ρ 18	σ 19	τ 20
		υ 21	ω 22	ω 23	ξ 24	ψ 25	ζ 26		

Fig. 5.2.8 Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del segundo experimento, donde cada imagen es un patrón de entrada.

A 01	B 02	X 03	Δ 04	E 05	Φ 06	Γ 07	H 08	I 09	ϑ 10
K 11	Λ 12	M 13	N 14	O 15	Π 16	Θ 17	P 18	Σ 19	T 20
		Υ 21	ς 22	Ω 23	Ξ 24	Ψ 25	Z 26		

Fig. 5.2.9 Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del segundo experimento, donde cada imagen es un patrón de salida.

Resultado obtenido.- Se recuperan las cincuenta y dos imágenes en la dirección respectiva, es decir, ingresando cualquier imagen que pertenece al conjunto fundamental se recupera la imagen asociada correcta correspondiente.

Lo anterior se obtiene para el modelo bidireccional asociativo simplificado y el modelo alternativo.

5.2.3 Tercer experimento: identificador de imágenes arbitrarias

Para este tercer experimento las imágenes que forman el conjunto fundamental aparecen en las dos figuras que a continuación se presentan. Estas imágenes han sido seleccionadas para este experimento porque no tienen alguna característica específica que ayude a diferenciar entre las demás imágenes, del mismo conjunto (imágenes de entrada).

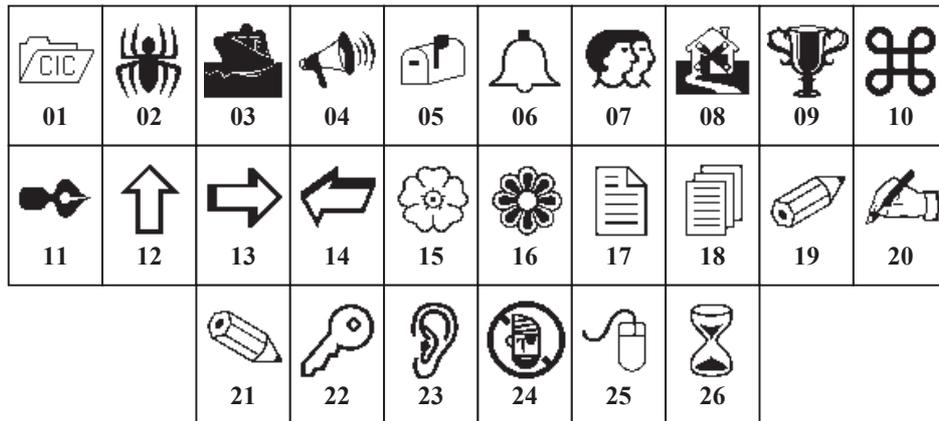


Fig. 5.2.10 Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del tercer experimento, donde cada imagen es un patrón de entrada.

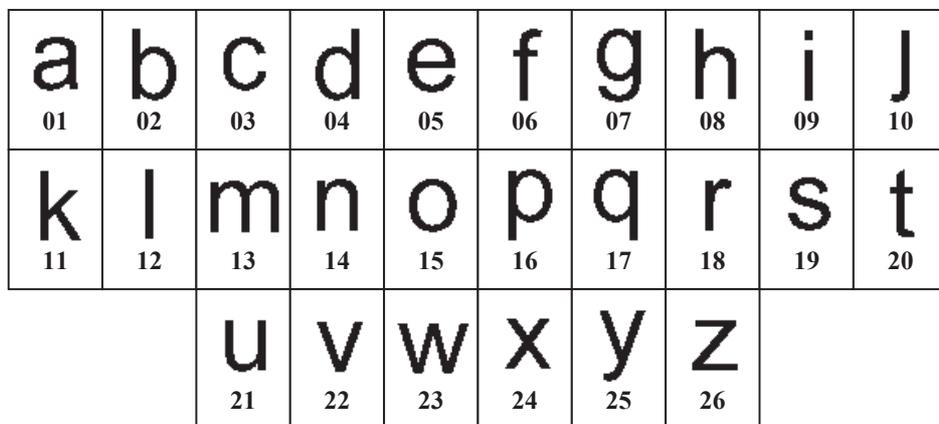


Fig. 5.2.11 Conjunto de imágenes que forma parte del conjunto fundamental del segundo experimento, donde cada imagen es un patrón de salida.

Resultado obtenido.- Se recuperan las cincuenta y dos imágenes en la dirección respectiva, es decir, ingresando cualquier imagen que pertenece al conjunto fundamental se recupera la imagen asociada correcta correspondiente.

También, el resultado obtenido está relacionado con el modelo bidireccional asociativo simplificado y el modelo alternativo.

5.2.4 Comparación del modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado y el modelo alternativo como clasificadores de patrones

Como se describe en el capítulo 4, utilizando solamente las dos primeras etapas del modelo asociativo bidireccional asociativo simplificado, se puede utilizar como clasificador de patrones, donde los patrones de salida corresponden con las clases a las cuales se quiere categorizar un patrón de entrada. A continuación se describe el programa desarrollado para la obtención de las tablas comparativas de clasificadores, la cual muestra los resultados obtenidos con los clasificadores implementados; y al igual que las secciones anteriores,

también se utiliza el factor de olvido como indicador para realizar comparaciones entre los clasificadores.

Adicionalmente, se utiliza otro método de validación el cual es mencionado en las comparaciones mostradas más adelante como *leave-one-out*, y es un caso particular del método de validación *k-fold cross validation* [92] cuyos pasos que describen el método se muestran en el párrafo que sigue.

El conjunto fundamental se divide al azar en k subconjuntos del mismo tamaño conservando cada una de las asociaciones originales entre un patrón de entrada y salida específico. De los k subconjuntos, uno sólo de ellos se conserva como datos de validación para probar el modelo, y los restantes $k-1$ subconjuntos se utilizan como datos de aprendizaje. El proceso de validación se repite k veces, donde cada uno de los k subconjuntos es utilizado una vez como los datos de validación y el resto como los datos de aprendizaje. Los resultados obtenidos utilizando cada uno de los k subconjuntos como datos de validación se promedia para producir un resultado.

El método *k-fold cross validation* donde k es igual a la cardinalidad de conjunto fundamental se conoce como *leave-one-out*, y éste se encuentra implementado en la aplicación descrita en esta sección.

Tal aplicación emplea un archivo de texto el cual contiene el banco de datos, que contiene los datos necesarios para realizar la fase de aprendizaje de los clasificadores contenidos, en esta aplicación. La figura siguiente muestra la forma en que se ve la aplicación cuando no se ha realizado alguna operación.

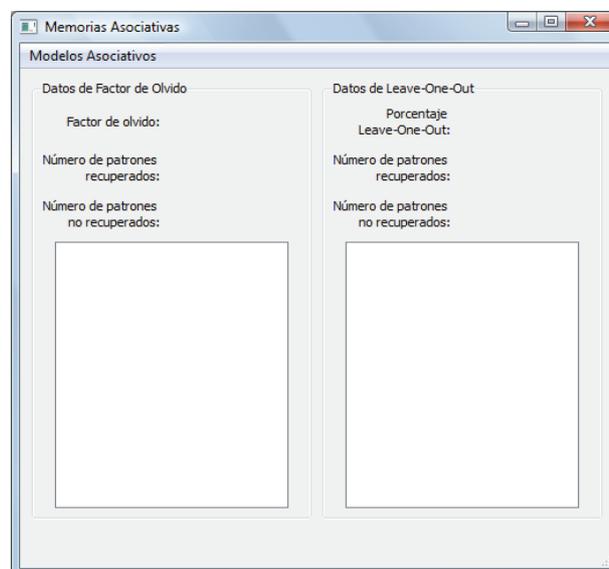


Fig. 5.2.12 Ventana inicial del programa que obtiene el factor de olvido y el porcentaje del método *leave-one-out* utilizando un banco de datos para diferentes clasificadores de patrones.

Del menú de este programa se elige la opción con nombre “Modelos Asociativos” y se muestran las opciones para la ejecución de cada uno de los modelos. Ver figura siguiente.

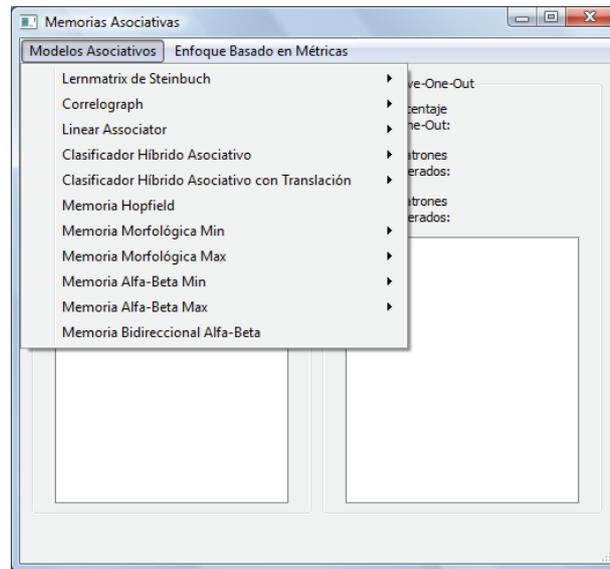


Fig. 5.2.13 Menú principal de la ventana inicial, del programa que obtiene el factor de olvido utilizando un banco de datos para diferentes clasificadores de patrones.

En las opciones (excepto en la opción “Memoria Hopfield” y el modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado), se puede elegir entre los dos métodos de codificación de los vectores correspondientes con las clases. La opción “Sin Método de Expansión” ejecuta el modelo seleccionado representando cada clase con un vector *one-hot* de dimensión igual al número de clases existentes.

La opción “Con Método de Expansión” ejecuta el modelo seleccionado representando cada clase con un vector *one-hot* de dimensión igual al número de patrones utilizados en la fase de aprendizaje. Lo descrito anteriormente se muestra en la siguiente imagen.

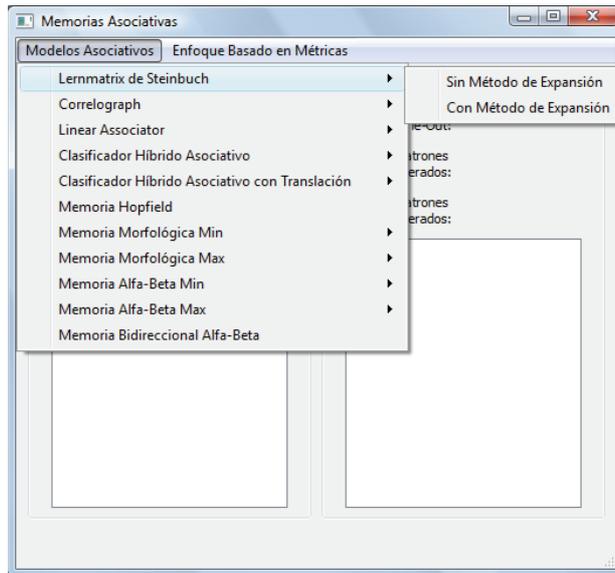


Fig. 5.2.14 Opciones pertenecientes al menú principal de la ventana inicial, del programa que obtiene el factor de olvido utilizando un banco de datos para diferentes clasificadores de patrones.

Cuando se elige la opción el programa realiza los métodos de validación y calcula el factor de olvido y el porcentaje del método *leave-one-out*, mostrando los resultados en pantalla y el número los patrones que no fueron recuperados en cada uno de los cálculos. Un ejemplo de cómo se muestran los resultados se presenta a continuación.

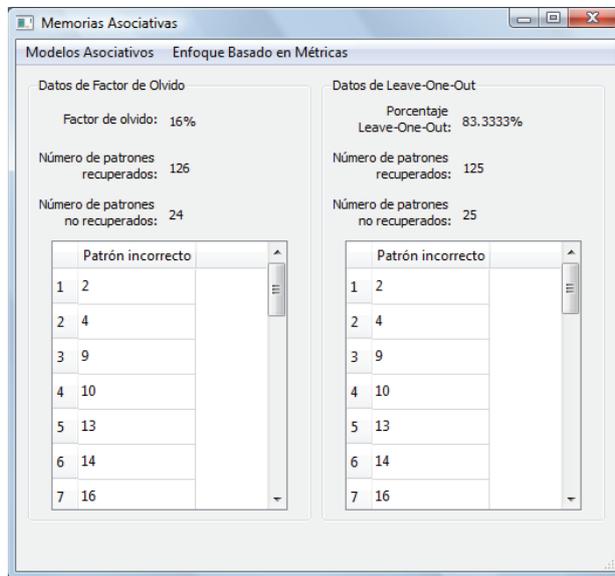


Fig. 5.2.15 Ejemplo del resultado del programa que obtiene el factor de olvido utilizando un banco de datos para un clasificador de patrones específico.

Para la última opción (el modelo de Hopfield), la fase de entrenamiento se realiza con los patrones del banco de datos sin tomar en cuenta las clases a las que pertenece cada patrón,

debido a que el modelo es autoasociativo; por lo tanto, para el cálculo del factor de olvido se verifica que el patrón de entrada fuera igual al de salida.

Del menú también se puede elegir la opción “Enfoque Basado en Métricas” y se muestran las opciones para la ejecución de cada uno de los modelos. Estas opciones corresponden con el clasificador euclidiano y al clasificador *knn*. Ver figura siguiente.

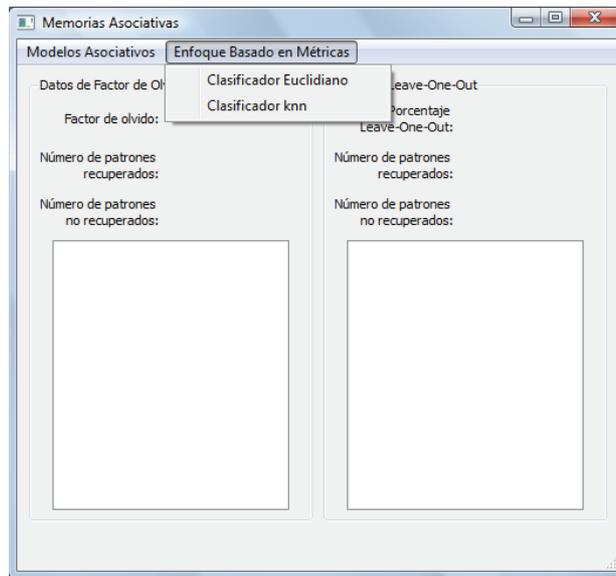


Fig. 5.2.16 Opciones pertenecientes al enfoque basado en métricas, del programa que obtiene el factor de olvido utilizando un banco de datos para diferentes clasificadores de patrones.

Los bancos de datos utilizados a continuación se encuentran en el repositorio de la Universidad de California, Irvin [93].

5.2.4.1 Banco de datos *iris*

El banco de datos contiene 3 clases con 50 instancias cada una. Cada clase está relacionada con un tipo de planta *iris* (*setosa*, *versicolour* y *virginica*).

La siguiente tabla muestra el factor de olvido obtenido en cada uno de los clasificadores utilizando el banco de datos de nombre *iris* y el programa descrito.

Nombre del clasificador	Número de patrones recuperados	Número de patrones no recuperados	Factor de olvido
Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado	147	3	2.00%
Clasificador <i>knn</i> con $k=1$	150	0	0.00%
Memoria bidireccional alfa-beta	148	2	1.33%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch con método de expansión	147	3	2.00%
Modelo asociativo <i>linear associator</i> con método de expansión	147	3	2.00%
Memoria morfológica <i>max</i> con método de expansión	147	3	2.00%
Memoria alfa-beta <i>max</i> con método de expansión	147	3	2.00%
Clasificador <i>knn</i> con $k=5$	145	5	3.33%
Clasificador <i>knn</i> con $k=3$	144	6	4.00%
Clasificador <i>knn</i> con $k=4$	144	6	4.00%
Clasificador euclidiano	139	11	7.33%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch	126	24	16.00%
Modelo asociativo <i>linear associator</i>	126	24	16.00%
Modelo asociativo <i>CHAT</i>	103	47	31.33%
Modelo asociativo <i>CHAT</i> con método de expansión	103	47	31.33%
<i>Correlograph</i> con método de expansión	86	64	42.66%
Modelo asociativo <i>CHA</i>	50	100	66.66%
Modelo asociativo <i>CHA</i> con método de expansión	50	100	66.66%
Memoria morfológica <i>min</i>	5	145	96.66%
Memoria alfa-beta <i>min</i>	5	145	96.66%
Modelo asociativo Hopfield	1	149	99.33%
<i>Correlograph</i>	0	150	100.00%
Memoria morfológica <i>min</i> con método de expansión	0	150	100.00%
Memoria morfológica <i>max</i>	0	150	100.00%
Memoria alfa-beta <i>min</i> con método de expansión	0	150	100.00%
Memoria alfa-beta <i>max</i>	0	150	100.00%

Tabla 5.2.1 Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del factor de olvido y el banco de datos *iris*.

A continuación la tabla mostrada contiene el resultado obtenido después de aplicar el método de validación *leave-one-out*.

Nombre del clasificador	Número de patrones recuperados	Número de patrones no recuperados	Porcentaje <i>leave-one-out</i>
Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado	48	102	32.00%
Clasificador <i>knn</i> con $k=5$	145	5	96.66%
Clasificador <i>knn</i> con $k=1$	144	6	96.00%
Clasificador <i>knn</i> con $k=3$	144	6	96.00%
Clasificador <i>knn</i> con $k=4$	144	6	96.00%
Clasificador euclidiano	138	12	92.00%
Modelo asociativo <i>linear associator</i>	121	29	80.66%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch con método de expansión	117	33	78.00%
Modelo asociativo <i>linear associator</i> con método de expansión	117	33	78.00%
Modelo asociativo <i>CHAT</i>	103	47	68.66%
Modelo asociativo <i>CHAT</i> con método de expansión	103	47	68.66%
<i>Correlograph</i> con método de expansión	65	85	43.33%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch			
Modelo asociativo <i>CHA</i>	50	100	33.33%
Modelo asociativo <i>CHA</i> con método de expansión	50	100	33.33%
Memoria morfológica <i>max</i> con método de expansión	48	102	32.00%
Memoria alfa-beta <i>max</i> con método de expansión	48	102	32.00%
Memoria morfológica <i>min</i>	5	145	3.33%
Memoria alfa-beta <i>min</i>	5	145	3.33%
Memoria bidireccional alfa-beta	2	148	1.33%
Modelo asociativo Hopfield	1	149	0.66%
<i>Correlograph</i>	0	150	0.00%
Memoria morfológica <i>min</i> con método de expansión	0	150	0.00%
Memoria morfológica <i>max</i>	0	150	0.00%
Memoria alfa-beta <i>min</i> con método de expansión	0	150	0.00%
Memoria alfa-beta <i>max</i>	0	958	0.00%

Tabla 5.2.2 Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del porcentaje del método *leave-one-out* y el banco de datos *iris*.

5.2.4.2 Banco de datos *tic-tac-toe endgame*

Otro banco de datos utilizado contiene información de las configuraciones del juego conocido como *tic-tac-toe*, específicamente las configuraciones finales de una partida. Es por eso que la base de datos tiene por nombre *tic-tac-toe endgame*. Este banco tiene el conjunto de posibles configuraciones que se puede tener al final de una partida de dicho juego.

Se puede clasificar cada configuración como positiva, cuando se puede crear una de las 8 líneas en el tablero del juego con los datos del jugador inicial. En otro caso la configuración es clasificada como negativa.

El número de instancias del banco de datos es 958 (configuraciones legales al final de una partida del juego), y el 65.3% de los patrones pertenecen a la clase positivo.

Las tablas con los resultados del factor de olvido y el porcentaje del método *leave-one-out* se muestran a continuación.

Nombre del clasificador	Número de patrones recuperados	Número de patrones no recuperados	Factor de olvido
Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado	958	0	0.00%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch con método de expansión	958	0	0.00%
Modelo asociativo <i>linear associator</i> con método de expansión	958	0	0.00%
Memoria morfológica <i>max</i> con método de expansión	958	0	0.00%
Memoria alfa-beta <i>max</i> con método de expansión	958	0	0.00%
Modelo asociativo <i>CHAT</i> con método de expansión	958	0	0.00%
Clasificador <i>knn</i> con $k=1$	958	0	0.00%
Memoria bidireccional alfa-beta	958	0	0.00%
Clasificador <i>knn</i> con $k=5$	806	152	15.86%
Clasificador <i>knn</i> con $k=3$	734	224	23.38%
Clasificador <i>knn</i> con $k=4$	734	224	23.38%
Modelo asociativo <i>CHA</i> con método de expansión	678	280	29.22%
<i>Correlograph</i> con método de expansión	657	301	31.41%
Modelo asociativo <i>linear associator</i>	626	332	34.65%
Modelo asociativo <i>CHA</i>	626	332	34.65%
Memoria morfológica <i>min</i> con método de expansión	626	332	34.65%
Memoria alfa-beta <i>min</i> con método de expansión	626	332	34.65%
Modelo asociativo <i>CHAT</i>	591	367	38.30%
Clasificador euclidiano	591	367	38.30%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch	413	545	56.88%
<i>Correlograph</i>	0	958	100.00%
Memoria morfológica <i>min</i>	0	958	100.00%
Memoria morfológica <i>max</i>	0	958	100.00%
Memoria alfa-beta <i>min</i>	0	958	100.00%
Memoria alfa-beta <i>max</i>	0	958	100.00%

Tabla 5.2.3 Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del factor de olvido y el banco de datos *tic-tac-toe endgame*.

Nombre del clasificador	Número de patrones recuperados	Número de patrones no recuperados	Porcentaje <i>leave-one-out</i>
Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado	538	420	56.15%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch con método de expansión	946	12	98.74%
Modelo asociativo <i>linear associator</i> con método de expansión	946	12	98.74%
Clasificador <i>knn</i> con $k=5$	806	152	84.13%
Memoria morfológica <i>max</i> con método de expansión	794	164	82.88%
Memoria alfa-beta <i>max</i> con método de expansión	794	164	82.88%
Modelo asociativo <i>CHAT</i> con método de expansión	790	168	82.46%
Clasificador <i>knn</i> con $k=3$	734	224	76.61%
Clasificador <i>knn</i> con $k=4$	734	224	76.61%
Clasificador <i>knn</i> con $k=1$	662	296	69.10%
Modelo asociativo <i>CHA</i> con método de expansión	662	296	69.10%
<i>Correlograph</i> con método de expansión	657	301	68.58%
Modelo asociativo <i>linear associator</i>	626	332	65.34%
Modelo asociativo <i>CHA</i>	626	332	65.34%
Memoria morfológica <i>min</i> con método de expansión	626	332	65.34%
Memoria alfa-beta <i>min</i> con método de expansión	626	332	65.34%
Clasificador euclidiano	591	367	61.69%
Modelo asociativo <i>CHAT</i>	591	367	61.69%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch	413	545	43.11%
Memoria bidireccional alfa-beta	0	958	0.00%
<i>Correlograph</i>	0	958	0.00%
Memoria morfológica <i>min</i>	0	958	0.00%
Memoria morfológica <i>max</i>	0	958	0.00%
Memoria alfa-beta <i>min</i>	0	958	0.00%
Memoria alfa-beta <i>max</i>	0	958	0.00%

Tabla 5.2.4 Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del porcentaje del método *leave-one-out* y el banco de datos *tic-tac-toe endgame*.

Por último, se muestra en la tabla que sigue los resultados conseguidos después de utilizar el método de validación *k-fold cross validation* con *k* igual a 10. Esto quiere decir que el proceso de validación se repite 10 veces, donde cada uno de los 10 subconjuntos obtenidos en el método es utilizado una vez como los datos de validación y el resto como los datos de aprendizaje. Los resultados obtenidos utilizando cada uno de los 10 subconjuntos como datos de validación se promedia para producir un resultado.

Para tener un resultado más confiable del método de validación *k-fold cross validation* con *k* igual a 10, éste se ha repetido 100 veces, por lo tanto el número de patrones total para la obtención del porcentaje resultante es 95800.

Nombre del clasificador	Número de patrones recuperados	Número de patrones no recuperados	Porcentaje <i>ten-fold cross validation</i>
Modelo bidireccional asociativo alfa-beta simplificado	67363	28437	70.31%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch con método de expansión	94451	1349	98.59%
Modelo asociativo <i>linear associator</i> con método de expansión	94451	1349	98.59%
Clasificador <i>knn</i> con <i>k=5</i>	80899	14901	84.44%
Memoria morfológica <i>max</i> con método de expansión	79399	16401	82.88%
Memoria alfa-beta <i>max</i> con método de expansión	79399	16401	82.88%
Modelo asociativo <i>CHAT</i> con método de expansión	77904	17896	81.31%
Clasificador <i>knn</i> con <i>k=3</i>	73747	22053	76.98%
Clasificador <i>knn</i> con <i>k=4</i>	73747	22053	76.98%
Clasificador <i>knn</i> con <i>k=1</i>	66227	29573	69.13%
Modelo asociativo <i>CHA</i> con método de expansión	66227	29573	69.13%
<i>Correlograph</i> con método de expansión	65782	30018	68.66%
Modelo asociativo <i>linear associator</i>	62600	33200	65.34%
Modelo asociativo <i>CHA</i>	62600	33200	65.34%
Memoria morfológica <i>min</i> con método de expansión	62600	33200	65.34%
Memoria alfa-beta <i>min</i> con método de expansión	62600	33200	65.34%
Modelo asociativo <i>CHAT</i>	56991	38809	59.48%
Clasificador euclidiano	56173	39627	58.63%
Modelo asociativo <i>lernmatrix</i> de Steinbuch	41341	54459	43.15%
Memoria bidireccional alfa-beta	0	95800	0.00%
<i>Correlograph</i>	0	95800	0.00%
Memoria morfológica <i>min</i>	0	95800	0.00%
Memoria morfológica <i>max</i>	0	95800	0.00%
Memoria alfa-beta <i>min</i>	0	95800	0.00%
Memoria alfa-beta <i>max</i>	0	95800	0.00%

Tabla 5.2.5 Tabla comparativa de diferentes clasificadores de patrones, tomando como base el cálculo del porcentaje del método *ten-fold cross validation* y el banco de datos *tic-tac-toe endgame*.

CAPÍTULO 6

Conclusiones y Trabajo Futuro

En esta sección se muestran las conclusiones obtenidas después de analizar los resultados del modelo de memoria asociativa bidireccional alfa-beta simplificado, motivo central de este trabajo de tesis. Además, se presentan posibles trabajos de investigación que pueden derivarse del modelo propuesto y sus aplicaciones.

6.1 Conclusiones

- En este trabajo de tesis se realizan tres tipos de modificaciones al modelo de memoria asociativa bidireccional alfa-beta original (*BAM* alfa-beta).
- Las modificaciones permiten reducir, en cada caso, los pasos que realiza el algoritmo original bidireccional alfa-beta.
- La recuperación correcta de los patrones del conjunto fundamental no está garantizada. Sin embargo, se obtienen tiempos de procesamiento menores; asimismo, se reducen los requerimientos de almacenamiento.
- Cada una de las tres modificaciones realizadas funciona con base en un algoritmo no iterativo, por lo que no requiere convergencia hacia estados estables, como sucede en la mayoría de los modelos clásicos.

6.2 Trabajo futuro

- Utilizar las memorias asociativas bidireccionales simplificadas para la compresión de imágenes.
- Usar las memorias asociativas bidireccionales simplificadas con imágenes en escala de gris.

Referencias

- [1] McCulloch, W. S. & Pitts, W. 1943, "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", *Bulletin of Mathematical Biophysics*, vol. 5, pp. 115-133.
- [2] Rosenblatt, F. 1958, "The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain", *Psychological Review*, vol. 65, no. 6, pp. 386-408.
- [3] Hebb, D. O. 1949, *The Organization of Behavior*, Wiley, New York.
- [4] Widrow, B. & Hoff, M. E. 1960, "Adaptive switching circuits", *IRE WESCON Convention Record*, part 4, pp. 96-104.
- [5] Widrow, B. 1962, "Generalization and information storage in networks of adaline neurons" in *Self Organizing Systems*, M. C. Yovitz, G. T. Jacobi, & G. D. Goldstein, eds., Spartan Books, Washington D.C.
- [6] Grossberg, S. 1976, "Adaptive pattern classification and universal recoding: I. Parallel development and coding of neural feature detectors", *Biological Cybernetics*, vol. 23, pp. 121-134.
- [7] Grossberg, S. 1976, "Adaptive pattern classification and universal recoding: II. Feedback, expectation, olfaction, illusions", *Biological Cybernetics*, vol. 23, pp. 187-202.
- [8] Minsky, M. & Papert, S. 1969, *Perceptrons*, MIT Press, Cambridge.
- [9] Kanal, L. N. 1993, "On pattern, categories, and alternate realities", *Pattern Recognition Letters*, vol. 14, no. 3, pp. 241-255.
- [10] Steinbuch, K. 1961, "Die lernmatrix", *Kybernetik*, vol. 1, no. 1, pp. 36-45.
- [11] Steinbuch, K. & Frank, H. 1961, "Nichtdigitale lernmatrizen als perzeptoren", *Kybernetik*, vol. 1, no.3, pp. 117-124.
- [12] Steinbuch, K. & Piske, U. A. W. 1963, "Learning matrices and their applications", *IEEE Transactions on Electronic Computers*, vol. EC-12, issue 6, pp. 846-862.
- [13] Willshaw, D., Buneman, O. & Longuet-Higgins, H. 1969, "Non-Holographic associative memory", *Nature*, no. 222, pp. 960-962.
- [14] Anderson, J. A. 1972, "A simple neural network generating an interactive memory", *Mathematical Biosciences*, vol. 14, pp. 197-220.
- [15] Kohonen, T. 1972, "Correlation matrix memories", *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-21, issue 4, pp. 353-359.

- [16] Nakano, K. 1972, “Associatron-A model of associative memory”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 2, issue 3, pp. 380-388.
- [17] Amari, S. 1972, “Learning patterns and pattern sequences by self-organizing nets of threshold elements”, *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-21, issue 11, pp. 1197-1206.
- [18] Hopfield, J. J. 1982, “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 79, pp. 2554-2558.
- [19] Rumelhart, D. E., Hinton, G. E. & Williams, R. J. 1985, *Learning internal representations by error propagation*, ICS Report 8506, Institute for Cognitive Science, University of California, San Diego.
- [20] Werbos, P. 1974, *Beyond regression: New tools for prediction and analysis in the behavioral sciences*, Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge.
- [21] Kosko, B. 1988, “Bidirectional associative memories”, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 18, no. 1, pp. 49-60.
- [22] Yáñez, C. & Díaz-de-León, J. L. 2003. “Memorias asociativas basadas en relaciones de orden y operaciones binarias”, *Computación y Sistemas*, vol. 6, no. 4, pp. 300–311.
- [23] Acevedo, M. E., Yáñez, C. & López, I. 2007, “Alpha-Beta bidirectional associative memories”, *International Journal of Computational Intelligence Research*, vol. 3, no. 1, pp. 105–110.
- [24] Duda, R. O., Hart, P. E. & Stork, D. G. 2001, *Pattern classification*, John Wiley & Sons, USA.
- [25] Marques de Sá, J. P. 2001, *Pattern recognition. Concepts, methods and applications*, Springer, Portugal.
- [26] Kanal, L. 1974, “Patterns in pattern recognition: 1968-1974”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 20, issue 6, pp. 697-722.
- [27] Hassoun, M. H. 1993, *Associative neural memories*, Oxford University Press, New York.
- [28] Kohonen, T. 1989, *Self-Organization and associative memory*, Springer-Verlag, Berlin.
- [29] Ritter, G. X. & Sussner, P. 1996, “An introduction to morphological neural networks”, *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, vol. IV, track D, pp. 709-717.

- [30] Ritter, G. X., Sussner, P. & Díaz-de-León, J. L. 1998, "Morphological associative memories", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 9, pp. 281-293.
- [31] Austin, J. 1987, "ADAM: A distributed associative memory for scene analysis", *Proceedings of First International Conference on Neural Networks*, pp. 285-295.
- [32] Kanerva, P. 1988, *Sparse distributed memory*, MIT Press, Cambridge.
- [33] Acevedo, M. E., Yáñez, C. & López, I. 2007, "Alpha-Beta bidirectional associative memories: Theory and applications", *Neural Processing Letters*, vol. 26, issue 1, pp. 1-40.
- [34] Acevedo, M. E., Yáñez, C. & Acevedo, M. A. 2010, "Associative models for storing and retrieving concept lattices", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2010, no. 356029, pp. 1-27.
- [35] Acevedo, M. E., López, I. & Felipe, F. 2009, "Classification of cancer recurrence with alpha-beta BAM", *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2009, no. 680112, pp. 1-14.
- [36] Haines, K. & Hecht-Nielsen, R. 1988, "A BAM with increased information storage capacity", *IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 1, pp. 181-190.
- [37] Wang, Y. -F., Cruz, J. B. Jr. & Mulligan, Jr. 1989, "An enhanced bidirectional associative memory", *IJCNN International Joint Conference on Neural Networks*, vol. 1, pp. 105-110.
- [38] Tai, H. -M., Wu, C. -H. & Jong, T. -L. 1989, "High-Order bidirectional associative memory", *Electronics Letters*, vol. 25, issue 21, pp. 1424-1425.
- [39] Jeng, Y. -J., Yeh, C. -C. & Chiveh, T. D. 1990, "Exponential bidirectional associative memories", *Electronics Letters*, vol. 26, issue 11, pp. 717-718.
- [40] Wang, Y. -F., Cruz, J. B. Jr. & Mulligan, Jr. 1990, "Two coding strategies for bidirectional associative memory", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 1, issue 1, pp. 81-92.
- [41] Wang, Y. -F., Cruz, J. B. Jr. & Mulligan, Jr. 1990, "On multiple training for bidirectional associative memory", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 1, issue 3, pp. 275-276.
- [42] Simpson, P. K. 1990, "Higher-Ordered and intraconnected bidirectional associative memories", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol. 20, no. 3, pp. 637-653.
- [43] Wang, Y. -F., Cruz, J. B. Jr. & Mulligan, Jr. 1991, "Guaranteed recall of all training pairs for bidirectional associative memory", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 1, issue 6, pp. 559-567.

- [44] Leung, C. S. & Cheung, K. F. 1991, "Householder encoding for discrete bidirectional associative memory", *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, vol. 1, pp. 237-241.
- [45] Srinivasan, V. & Chia, C. S. 1991, "Improving bidirectional associative memory performance by unlearning", *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, vol. 3, pp. 2472-2477.
- [46] Wang, W. -J. & Lee, D. -L. 1992, "Modified exponential bidirectional associative memories", *Electronics Letters*, vol. 28, issue 9, pp. 888-890.
- [47] Jeng, Y. -J., Yeh, C. -C. & Chiueh, T. -D. 1992, "Generalised stable bidirectional associative memory", *Electronics Letters*, vol. 28, issue 15, pp. 1396-1398.
- [48] Yu, H. & Wang, Z. 1992, "Bidirectional associative memories on the matching criterion of weighted Hamming distance", *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 4, pp. 3481-3484.
- [49] Lee, D. -L. & Wang, W. -J. 1993, "Improvement of bidirectional associative memories by using correlation significance", *Electronics Letters*, vol. 29, issue 8, pp. 688-690.
- [50] Perfetti, R. 1993, "Optimal gradient descent learning for bidirectional associative memories", *Electronics Letters*, vol. 29, issue 17, pp. 1556-1557.
- [51] Leung, C. S. 1993, "Encoding method for bidirectional associative memory using projection on convex sets", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 4, issue 5, pp. 879-881.
- [52] Leung, C. S. 1993, "Robust learning rule for bidirectional associative memory", *Proceedings of IJCNN International Joint Conference on Neural Networks*, vol. 3, pp. 2686-2689.
- [53] Khorasani, K., Cuffaro, A. & Grigoriu, T. 1994, "A new learning algorithm for bidirectional associative memory neural networks", *IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 2, pp. 1115-1120.
- [54] Wang, C. -C. & Tsai, C. -R. 1994, "An analysis of practical capacity of exponential bidirectional associative memory", *IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 2, pp. 1074-1079.
- [55] Xu, Z. -B., Leung, Y. & He, X. -W. 1994, "Asymmetric bidirectional associative memories", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 24, issue 10, pp. 1558-1564.

- [56] Hattori, M., Hagiwara, M. & Nakagawa, M. 1994, "New results of quick learning for bidirectional associative memory having high capacity", *IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 2, pp. 1080-1085.
- [57] Leung, C. S. 1994, "Optimum learning for bidirectional associative memory in the sense of capacity", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 24, issue 5, pp. 791-796.
- [58] Hu, G. -Q., Kwong, C. -P. & Xu, Z. -B. 1994, "Two iterative encoding schemes for bidirectional associative memory", *Proceedings of ISSIPNN International Symposium on Speech, Image Processing and Neural Networks*, vol. 1, pp. 93-96.
- [59] Wang, Z. -O. 1996, "A bidirectional associative memory based on optimal linear associative memory", *IEEE Transactions on Computers*, vol. 45, issue 10, pp. 1171-1179.
- [60] Sarkar, D. 1996, "A three-stage architecture for bidirectional associative memory", *IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 1, pp. 531/4-531/9.
- [61] Osana, Y., Hattori, M. & Hagiwara, M. 1996, "Chaotic bidirectional associative memory", *IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 2, pp. 816-821.
- [62] Chen, S., Gao, H. & Yan, W. 1997, "Improved exponential bidirectional associative memory", *Electronics Letters*, vol. 33, issue 3, pp. 223-224.
- [63] Haryono, Sadananda, R. & Phien, H. N. 1997, "Orthogonal schemes for bidirectional associative memories", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, part B, vol. 27, issue 3, pp. 543-551.
- [64] Araújo, A. F. R. & Haga, G. M. 1997, "Two simple strategies to improve bidirectional associative memory's performance: unlearning and delta rule", *International Conference on Neural Networks*, vol. 2, pp. 1178-1182.
- [65] Ritter, G. X., Díaz-de-León, J. L. & Sussner, P. 1999, "Morphological bidirectional associative memories", *Neural Networks*, vol. 12, pp. 851-867.
- [66] Wu, Y. & Pados, D. A. 2000, "A feedforward bidirectional associative memory", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 11, issue 4, pp. 859-866.
- [67] Lenze, B. 2001, "Improving Leung's bidirectional learning rule for associative memories", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 12, issue 5, pp. 1222-1226.
- [68] Eom, T. -D., Oh, S. -K. & Lee, J. -J. 2001, "Guaranteed recall of all training pairs for exponential bidirectional associative memory", *Electronics Letters*, vol. 37, issue 3, pp. 153-154.

- [69] Lee, D. -L. & Chuang, T. C. 2004, "Design of general bidirectional associative memories with improved recall capability", *International Journal of Neural Systems*, vol. 14, no. 5, pp. 325-328.
- [70] Zheng, G., Givigi, S. N. & Zheng, W. 2005, "A new strategy for designing bidirectional associative memories", *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, vol. 3496, pp. 398-403.
- [71] Shen, D. & Cruz, J. B. Jr. 2005, "Encoding strategy for maximum noise tolerance bidirectional associative memory", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, issue 2, pp. 293-300.
- [72] Du, S. Z., Chen, Z. Q. & Yuan, Z. Z. 2005, "Sensitivity to noise in bidirectional associative memory (BAM)", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 16, issue 4, pp. 887-898.
- [73] Du, S. Z., Chen, Z. Q. & Yuan, Z. Z. 2005, "Evolutionary pseudo-relaxation learning algorithm for bidirectional associative memory", *Journal of Computer Science and Technology*, vol. 20, issue 4, pp. 559-566.
- [74] Rajapakse, R. & Denham, M. 2005, "Fast access to concepts in concept lattices via bidirectional associative memories", *Neural Computation*, vol. 17, issue 10, pp. 2291-2300.
- [75] Maeda, Y & Wakamura, M. 2005, "Bidirectional associative memory with learning capability using simultaneous perturbation", *Neurocomputing*, vol. 69, issue 1-3, pp. 182-197.
- [76] Chartier, S. & Boukadoum, M. 2006, "A bidirectional heteroassociative memory for binary and grey-level patterns", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 17, no. 2, pp. 385-396.
- [77] Vázquez, R. A. & Sossa, J. H. 2008, "A bidirectional hetero-associative memory for true-color patterns", *Neural Processing Letters*, vol. 28, issue 3, pp. 131-153.
- [78] Hong, C., Zuren, F & Xiaoliang, W. 2008, "Object recognition and tracking with maximum likelihood bidirectional associative memory networks", *Neurocomputing*, vol. 72, issue 1-3, pp. 278-292.
- [79] Hong, C., Zuren, F & Xiaoliang, W. 2009, "Optimum associative neural network utilizing maximum likelihood", *Neurocomputing*, vol. 72, issue 4-6, pp. 1274-1282.
- [80] Chartier, S., Giguere, G. & Langlois, D. 2009, "A new bidirectional heteroassociative memory encompassing correlational, competitive and topological properties", *Neural Networks*, vol. 22, issue 5-6, pp. 568-578.

- [81] Chartier, S., Boukadoum, M. & Amiri, M. 2009, "BAM learning of nonlinearly separable tasks by using an asymmetrical output function and reinforcement learning", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 20, issue 8, pp. 1281-1292.
- [82] Aziz, B. A. 2009, "Performance analysis and comparison of a minimum interconnections direct storage model with traditional neural bidirectional memories", *IET Nanobiotechnology*, vol. 3, issue 4, pp. 81-102.
- [83] Chartier, S. & Boukadoum, M. 2011, "Encoding static and temporal patterns with a bidirectional heteroassociative memory", *Journal of Applied Mathematics*.
- [84] Qadir, O., Liu, J. & Tempesti, G. 2011, "From bidirectional associative memory to a noise-tolerant, robust protein processor associative memory", *Artificial Intelligence*, vol. 175, issue 2, pp. 673-693.
- [85] Leung, A. C., Sum, P. F. & Ho, K. 2011, "The effect of weight fault on associative networks", *Neural Computing & Applications*, vol. 20, issue 1, pp. 113-121.
- [86] Zheng, P., Zhang, J. & Tang, W. 2011, "Learning associative memories by error backpropagation", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 22, issue 3, pp. 347-355.
- [87] Rosen, K. 1999, *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill, USA.
- [88] Cover, T. M. & Hart, P. E. 1967, "Nearest Pattern Classification", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-13, issue 1, pp. 21-27.
- [89] González, R. C. & Woods, R. E. 2001, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, USA.
- [90] Santiago, R. 2003, *Clasificador híbrido de patrones basado en la Lernmatrix de Steinbuch y el Linear Associator de Anderson-Kohonen*, M.Sc. thesis, Research Center in Computation, Mexico.
- [91] Fingerprint Verification Competition. Available at <http://bias.csr.unibo.it/fvc2000/download.asp>
- [92] Kohavi, R. 1995, "A Study of Cross-Validation and Bootstrap for Accuracy Estimation and Model Selection", *International Joint Conference on Artificial Intelligence*.
- [93] UCI Machine Learning Repository. Available at <http://www.ics.uci.edu/~mllearn/>

Anexo

a) Complejidad en espacio de la memoria asociativa bidireccional alfa-beta

Se necesitan una matriz para guardar los p patrones x . La matriz tendrá dimensiones de $p \times (n+p)$. En la misma matriz se guardan los patrones de entrada y los vectores añadidos tanto del *one-hot* como del *zero-hot*. Dado que $x \in \{0, 1\}$, entonces estos valores se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. El número total de bytes será: $\text{bytes}_x = p(n+p)$.

Se necesita una matriz para guardar los p patrones y . La matriz tendrá dimensiones de $p \times (m+p)$. En la misma matriz se guardan los patrones de salida y los vectores añadidos tanto del *one-hot* como del *zero-hot*. Dado que $y \in \{0, 1\}$, entonces estos valores se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. El número total de bytes será: $\text{bytes}_y = p(m+p)$.

En la fase de aprendizaje se necesitan 4 matrices. Dos para las memoria autoasociativas alfa-beta tipo *max* (A_{max}), y dos para las memorias autoasociativas alfa-beta tipo *min* (A_{min}). Dos de estas 4 matrices tienen dimensiones $(n+p) \times (n+p)$ y las otras dos tienen dimensiones $(m+p) \times (m+p)$. Dado que estas matrices contienen sólo números enteros positivos, entonces los valores de sus componentes se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. El número total de bytes será $\text{bytes}_1 = 2(n+p)^2$ y $\text{bytes}_2 = 2(m+p)^2$.

Se utiliza el vector en donde se guarda el vector *one-hot* recuperado, cuya dimensión es de p . Dado que las componentes de cualquier vector *one-hot* toman los valores de 0 y 1, entonces estos valores se pueden representar con variables de tipo carácter que ocupan 1 byte. El número total de bytes será $\text{bytes}_r = p$.

El total de bytes requeridos para implementar una BAM Alfa-Beta es:

$$\begin{aligned} \text{Total} &= \text{bytes}_x + \text{bytes}_y + \text{bytes}_1 + \text{bytes}_2 + \text{bytes}_r \\ \text{Total} &= p(n+p) + p(m+p) + 2(n+p)^2 + 2(m+p)^2 + p \\ \text{Total} &= p[(n+p) + (m+p)] + 2[(n+p)^2 + (m+p)^2] + p \\ \text{Total} &= p(n+m+2p) + 2[(n+p)^2 + (m+p)^2] + p \end{aligned}$$

b) Complejidad en tiempo de la memoria asociativa bidireccional alfa-beta

Se define lo siguiente:

OE: operación elemental.

n_pares : es el número de pares de patrones asociados.

n : es la dimensión de los patrones más la adición de los vectores *one-hot* o *zero-hot*.

Se analiza el algoritmo de la fase de aprendizaje porque es la parte de todo el algoritmo que requiere de más operaciones elementales.

Algoritmo de la fase de aprendizaje:

```

u = 0; (1)
while(u < n_pares) (2)
{
    i = 0; (3)
    while(i < n) (4)
    {
        j = 0; (5)
        while(j < n) (6)
        {
            if(y[u][i] == 0 && y[u][j] == 0) (7)
                t = 1; (8)
            else if(y[u][i] == 0 && y[u][j] == 1) (9a)
                t = 0;
            else if(y[u][i] == 1 && y[u][j] == 0) (9b)
                t = 2;
            else
                t = 1;
            if(u == 0) (10)
                Vy[i][j] = t; (11)
            else
                if(Vy[i][j] < t) (12)
                    Vy[i][j] = t; (13)
            j++; (14)
        }
        i++; (15)
    }
    u++; (16)
}

```

- (1) 1 OE, asignación
- (2) n_pares OE, comparaciones
- (3) n_pares OE, asignación
- (4) n_pares * n OE, comparaciones
- (5) n_pares * n OE, asignación
- (6) n_pares * n * n OE, comparaciones
- (7a) n_pares * n * n OE, comparaciones: y[u][i] == 0
- (7b) n_pares * n * n OE, operador relacional AND: &&
- (7c) n_pares * n * n OE, comparaciones: y[u][j] == 0
- (8) Siempre se va a realizar una asignación a la variable t, n_pares * n * n OE
- (9) Ambas sentencias if (a y b) tiene la mitad de probabilidad de ejecutarse, n_pares * n * (n/2)
- (10) n_pares * n * n OE, comparaciones
- (11) Esta asignación sólo se realiza una vez, 1 OE

- (12) $(n_pares * n * n) - 1$ OE, comparaciones
- (13) tiene la mitad de probabilidad de ejecutarse la asignación, $n_pares * n * (n/2)$
- (14) $n_pares * n * n$ OE, incremento
- (15) $n_pares * n$ OE, incremento
- (16) n_pares OE, incremento

El número total de OE es:

$$\begin{aligned}
 \text{Total} &= 1 + n_pares + n_pares + n_pares * n + n_pares * n + n_pares * n * n + n_pares * n * n + \\
 &n_pares * n * n + n_pares * n * n + n_pares * n * n + n_pares * n * (n/2) + \\
 &n_pares * n * n + 1 + [(n_pares * n * n) - 1] + n_pares * n * (n/2) + n_pares * n * n + n_pares * n + \\
 &n_pares \\
 \text{Total} &= 2 + 3n_pares + 3n_pares * n + 7n_pares * n * n + 2[n_pares * n * (n/2)] + \\
 &[(n_pares * n * n) - 1] \\
 \text{Total} &= 2 + n_pares(3 + 3n + 8n^2) + n_pares * n^2 - 1 \\
 \text{Total} &= 1 + n_pares(3 + 3n + 9n^2)
 \end{aligned}$$

Del total de OE obtenida, se fija n_pares en el valor de 50, lo que resulta en una función que sólo depende del tamaño de los patrones: $f(n) = 1 + 50(3 + 3n + 9n^2)$.

Para analizar la factibilidad del algoritmo es necesario entender que tan rápido crece la función obtenida conforme aumenta el valor de n . Para este cometido, se utilizará la notación BIG-O [87], que se define a continuación.

Sea f y g funciones de un conjunto de enteros o de un conjunto de números reales a un conjunto de números reales. Se dice que $f(x)$ es $O(g(x))$ si existen dos constantes C y k tal que: $|f(x)| \leq C |g(x)|$ cuando $x > k$.

Ahora, el número de operaciones elementales obtenidas de nuestro algoritmo fue: $f(n) = 1 + 50(3 + 3n + 9n^2)$.

Se debe encontrar una función $g(x)$, C y k , que cumplan con la desigualdad. Se propone $50(3n^2 + 3n^2 + 9n^2) = 150n^2 + 150n^2 + 450n^2 = 750n^2$.

Entonces si $g(n) = n^2$, $C = 750$ y $k = 1$, tenemos que $|f(n)| \leq 750 |g(n)|$ cuando $n > 1$, por lo tanto $O(n^2)$.