



Instituto Politécnico Nacional

---

---

Centro de Investigación en Computación

Secretaría de Investigación y Posgrado

**Modelado de redes de Petri con  
retroalimentación de activación**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE CÓMPUTO CON  
OPCIÓN EN SISTEMAS DIGITALES

**P R E S E N T A**

Ing. Eduardo López Eslava

**DIRECTOR (ES) DE TESIS:**

Dr. José de Jesús Medel Juárez

Dra. Rosaura Orozco Palma



MÉXICO, D.F.

2013



## *INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL*

### *SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO*

#### *CARTA CESIÓN DE DERECHOS*

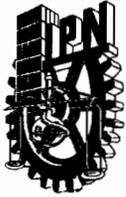
En la Ciudad de México el día 6 del mes de Diciembre del año 2013, el que suscribe Eduardo López Eslava alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Cómputo con número de registro B110916, adscrito al Centro de Investigación en Computación, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. José de Jesús Medel Juárez y la Dra. Rosaura Palma Orozco y cede los derechos del trabajo intitulado Modelado de redes de Petri con retroalimentación de activación, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o directores del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección [elopez\\_b11@sagitario.cic.ipn.mx](mailto:elopez_b11@sagitario.cic.ipn.mx). Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

*Eduardo López E.*  
Eduardo López Eslava

---

Nombre y firma



# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

## ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México, D.F. siendo las 10:00 horas del día 22 del mes de noviembre de 2013 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de la Tesis, designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación del:

### **Centro de Investigación en Computación**

para examinar la tesis titulada:

### **“Modelado de redes de Petri con retroalimentación de activación”**

Presentada por el alumno:

**López**

Apellido paterno

**Eslava**

Apellido materno

**Eduardo**

Nombre(s)

Con registro:

B	1	1	0	9	1	6
---	---	---	---	---	---	---

aspirante de: **MAESTRÍA EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE CÓMPUTO CON OPCIÓN EN SISTEMAS DIGITALES**

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron **APROBAR LA TESIS**, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

### LA COMISIÓN REVISORA

Directores de Tesis

Dr. José de Jesús Medel Juárez

Dra. Rosaura Palma Orozco

Dr. Sergio Suárez Guerra

Dr. Oleksiy Pogrebnyak

Dr. Luis Pastor Sánchez Fernández

Romeo Urbieta Parrazales



PRESIDENTE DEL COLEGIO DE PROFESORES

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN

EN COMPUTACIÓN

Dr. Luis Alfonso Villalva

# Resumen

---

Muchos sistemas no pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales, sistemas en los cuales la ocurrencia de algún evento puede llevar al sistema de un estado a otro, y en los cuales un evento puede ocurrir abruptamente o en un instante de tiempo indeterminado. Las redes de Petri son una herramienta matemática y gráfica para sistemas que presentan este tipo de características. El carácter visual de las redes de Petri nos permite observar el flujo de comportamiento de una sistema en cada una de sus etapas, en el cual se supone una correcta ejecución de cada una de ellas. El tener esta idealización de las etapas, en el caso de las redes de Petri, el paso de un marcaje por medio de una transición es transparente, lo cual nos impide observar a detalle las variaciones inherentes que se tienen en los procesos, ya sea debido al envejecimiento de los componentes, el desempeño del personal, las condiciones o regímenes de operación anormales de los dispositivos, defectos de materia prima, etc. Estas variaciones deberían reflejarse en las transformaciones que sufre el marcaje a lo largo del proceso, lo cual no es así, dado que viaja a lo largo del proceso encontrándose en un dominio discreto, impidiendo observar esas pequeñas variaciones.

En las investigaciones citadas en esta tesis se realizan muchas aplicaciones con las diferentes redes existentes hoy en día en diferentes campos, se modela el tráfico vehicular, sistemas de manufactura flexible, así como también en diseño de algoritmos en el área de computación entre muchos otros, Pero sin resolver el problema de descripción de errores ya sea por medición, defecto o

transformación que se encuentran en muchos de estos sistemas.

El presente trabajo tiene como objetivo caracterizar estas variaciones que no se encuentran en las redes de Petri, lo que permitirá tomar una decisión con una mejor información de lo que está ocurriendo en el proceso considerado. Los arcos en las redes de Petri propuesta tienen condiciones dinámicas y de igual forma selección de un recorrido de acuerdo al desarrollo del proceso considerado, permitiendo que los resultados obtenidos que se den, para el caso de un proceso de producción, sean adecuados para que en los insumos no existan pérdidas de recursos ni de tiempo en todo el proceso de selección. El ajuste de los coeficientes de los arcos se realiza por medio de la retroalimentación de activación, considerando las características probabilísticas con que opera en cada etapa el proceso, de acuerdo a las restricciones de recursos. El recorrido en la red se realiza a través de aquellos arcos que brinden una mayor probabilidad de éxito para la realización del proceso considerado.

# Abstract

---

Many systems cannot be described by differential equations, in such systems, the occurrence of an event can bring the system from one state to another, and that events can occur abruptly at undetermined time instant. The Petri nets are mathematical and graphical tools to systems which present this kind of characteristics. The visual characteristic allows to observe the flow behavior of a system in each of its stage, which is assumed a correctly execution of them. Having this idealization of stages, in the if Petri nets, the tokens through of transitions is clear, as a result we do not have details of inherent variations that are in the process, due to aging of components, staff performance, conditions or abnormal operation regimes of the devices, defective of the raw material, etc. The changes should be reflected in the tokens transformations which occur along the process, but this not happen, because of the tokens are situated in the discrete domain by preventing those slight variations observed.

In the research cited in this thesis is around to model different systems like vehicle traffic, flexible manufacturing systems, and also algorithm design in the computer science area, among others, but it does not solve the error description problem due to measurement, defect or transformation which is found in a lot of systems.

The present work aim at characterizing these variations are not found the Petri nets, which we allow to take a decisions with better information

about what is happening in the process considered. The arcs in the Petri nets proposed have dynamic conditions and similarly selecting a route according to the process in question, allowing the results to occur, for the case the production process, it is suitable so that the inputs there is no exist losses of resources or time throughout the selection process. The fitting coefficients of the arcs are performed by feedback activation, considering the probabilistic characteristic that each stage operates on the process according to resources constraints. The route in the network is performed through these arcs that provide a greater probability of success in carrying out the process under consideration.

## Agradecimientos

Este trabajo no se hubiera logrado sin el apoyo incondicional de mi familia, en especial de mi mamá Celsa Eslava Escamilla y de mis hermanos Victor Manuel López Eslava y Marco Antonio López Eslava.

También quiero agradecer de forma especial al Dr. José de Jesús Medel Juárez por darme la oportunidad de colaborar con él, del mismo modo hago extenso este agradecimiento para mi asesora la Dra. Rosaura Palma Orozco por su paciencia y motivación.

Por último quiero agradecer al Centro de Investigación en Computación que me abrió sus puertas y me permitió desarrollarme de manera profesional, así como también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología(CONACYT) por brindarme el apoyo económico a lo largo de mis estudios.

# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>III</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>V</b>
<b>Índice general</b>	<b>VI</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>VIII</b>
	<b>IX</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>X</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	3
1.3. Justificación . . . . .	4
1.4. Objetivo de la tesis . . . . .	5
1.5. Objetivos particulares . . . . .	5
<b>2. Estado del arte</b>	<b>6</b>
2.1. Redes de Petri discretas . . . . .	7
2.2. Redes de Petri continuas . . . . .	16

<b>3. Marco teórico</b>	<b>20</b>
3.1. Redes de Petri . . . . .	21
3.1.1. Propiedades de las redes de Petri . . . . .	24
3.1.1.1. Propiedades dinámicas . . . . .	24
3.1.1.2. Propiedades estructurales . . . . .	26
3.1.2. Métodos de análisis . . . . .	27
3.2. Espacio con medida . . . . .	37
3.2.1. Espacio de probabilidad . . . . .	38
3.3. Proceso estocástico . . . . .	39
3.3.1. Proceso de Poisson . . . . .	40
3.3.2. Proceso de Wiener . . . . .	42
<b>4. Red de Petri con marcaje aleatorio</b>	<b>44</b>
4.1. Definición de la red de Petri con marcaje aleatorio . . . . .	45
4.2. Reglas de disparo de una transición. . . . .	51
4.3. Evolución de marcaje en una red de Petri . . . . .	52
<b>5. Pruebas y resultados</b>	<b>58</b>
<b>6. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>78</b>
6.1. Conclusiones . . . . .	79
6.2. Trabajos futuros . . . . .	81
<b>Referencias</b>	<b>91</b>

# Índice de figuras

---

2.1.	Transición con arco inhibidor. . . . .	8
2.2.	Prioridad en una red de Petri. . . . .	9
2.3.	Sistema con operaciones temporizadas. . . . .	11
2.4.	Principio de disparo de una transición síncrona. . . . .	13
2.5.	Sistema de dos vagones. . . . .	14
2.6.	Modelo en redes de Petri (a)ordinarias, (b)coloreadas. . . . .	15
2.7.	Mezcla modelada por una red de Petri continua. . . . .	18
3.1.	Elementos de una red de Petri. . . . .	21
3.2.	Modelo con redes de Petri del cómputo de $x = (a + b)/(a - b)$ . . . . .	23
3.3.	Una red de Petri con su respectivo árbol de cubrimiento. . . . .	29
3.4.	Transformaciones en una red de Petri . . . . .	30
3.5.	Modelo de una red de Petri. . . . .	32
3.6.	Estado inicial de la red con $M_0$ . . . . .	34
3.7.	Estado de la red con $M_0$ y $U_k$ . . . . .	35
3.8.	Estado de la red con $M_d$ y $U'_k$ . . . . .	36
3.9.	Proceso estocástico discreto. . . . .	40
3.10.	Proceso estocástico continuo. . . . .	41
3.11.	Movimiento browniano de dos dimensiones. . . . .	43
4.1.	Modelo de una red Petri con marcaje aleatorio. . . . .	46
4.2.	Modelo de una sistema por medio de una red de Petri. . . . .	52
4.3.	Relación de lugares de entrada respecto a cada lugar de salida. . . . .	54

4.4.	Relación de lugares de entrada con cada lugar de salida (cont.).	54
4.5.	Relación de equivalencia. . . . .	55
5.1.	Modelo de dispensadora de café con redes de Petri. . . . .	59
5.2.	Muestro de la relación entre ingredientes y cantidad de café. .	60
5.3.	Modelo equivalente con arco de relación único. . . . .	62
5.4.	Modelo con $RP_{ma}$ para bebida energética . . . . .	65
5.5.	Modelo con $RP_{ma}$ para bebida energética con pesos iniciales. .	68
5.6.	Relaciones entre entradas y cada salida. . . . .	70
5.7.	Relación $P_1 + P_2$ vs $P_7$ . . . . .	71
5.8.	Relación $P_3 + P_4$ vs $P_8$ . . . . .	72
5.9.	Relación $P_5 + P_6$ vs $P_9$ . . . . .	73
5.10.	Relación $P_7 + P_8 + P_9$ vs $P_{10}$ . . . . .	74
5.11.	Relación $P_7 + P_8 + P_9$ vs $P_{11}$ . . . . .	75

# Índice de tablas

---

3.1.	Interpretaciones típicas de los elementos de una red de Petri . . . . .	22
6.1.	Valores de la Función de Distribución Acumulativa de $N(0,1)$ . . . . .	83
6.2.	Valores de la Función de Distribución Acumulativa (cont. 6.1). . . . .	84
6.3.	Valores de entrada para el vaso de tamaño grande. . . . .	85
6.4.	Valores de entrada para el vaso de tamaño mediano. . . . .	86
6.5.	Valores de entrada para el vaso de tamaño chico. . . . .	87
6.6.	Valores de salida para el vaso de tamaño grande. . . . .	88
6.7.	Valores de salida para el vaso de tamaño mediano. . . . .	89
6.8.	Valores de salida para el vaso de tamaño chico . . . . .	90

# Glosario

---

*Arcos direccionados:* Indican precedencia/ causalidad/movimiento.

*Ficha:* Es un indicador de que la condición asociada a un lugar se cumple. Puede ser un objeto (recurso o pieza), o una estructura de datos que se manipula.

*Grafo de estados:* Es una red de Petri ordinaria tal que cada transición  $t$  tiene exactamente un lugar de entrada y un lugar de salida.

*Grafo marcado:* Es una red de Petri ordinaria tal que cada lugar  $p$  tiene exactamente una transición de entrada y una transición de salida.

*Lugares:* Los lugares representan entidades del mundo real interpretados como entes pasivos, por ejemplo: condiciones, recursos o instancias de recursos, variables, colas de espera, ..

*Pesos de arcos:* Representan cantidades fijas asociadas a condiciones.

*Red de Petri de libre elección:* Una red de Petri es de libre elección si todos los lugares tienen como conjunto de salida más de una transición, pero este conjunto de transiciones solo debe tener un conjunto de entrada unitario.

*Red de Petri ordinaria:* Se dice que una red de Petri es ordinaria si los pesos de todos sus arcos son 0 ó 1.

*Red de Petri pura:* Una red se dice pura si ninguna transición hace parte del conjunto de elementos de entrada y salida de un mismo lugar en la red.

*Red de Petri simple:* Para cada transición, a lo sumo uno de sus lugares de entrada puede ser compartido con otras transiciones.

*Red de Petri T-restrictivas:* Son aquellas para las cuales todas las transiciones deben tener al menos un lugar de entrada y un lugar de salida.

*Redes de Petri generalizadas:* son aquellas en las que se introduce un peso en los arcos. Un arco no etiquetado es de valoración unidad.

*Transiciones:* Representan entidades del mundo real interpretados como entes activos, por ejemplo: eventos, acciones, sentencias, transmisión de mensajes.

# Introducción

---

## 1.1. Antecedentes

A medida que se desarrolla la tecnología las exigencias en el desempeño de los procesos se vuelven cada vez más rigurosas, y lo que en un momento parecía tener cierta regularidad con variaciones imperceptibles, ahora quedan en evidencias ciertas irregularidades, irregularidades que terminan por desencadenar errores notables y que obligan a reconsiderar los métodos de análisis de sistemas.

Una de las herramientas que permite hacer análisis dinámico tanto gráfico como matemático de un sistema son las redes de Petri, introducidas ya desde la década de los sesentas. Las redes de Petri son un grafo dirigido que está compuesto por cinco elementos que en principio eran suficientes y adecuados para su propósito.

Las redes de Petri fueron introducidas en la literatura en la tesis de Carl Adam Petri como una herramienta para simular las propiedades dinámicas de sistemas con eventos discretos. Desde entonces su estudio y desarrollo han tenido un auge realmente prolífero debido principalmente a las numerosas aplicaciones que se han encontrado.

Fueron utilizadas inicialmente para el análisis de algoritmos en la computación paralela o concurrente, pero dado a los procesos de producción actua-

les, también se volvieron las redes de Petri un método alternativo de diseño para procesos industriales, principalmente en los sistemas de manufactura flexible o más generalmente fabricación automática.

Las redes de Petri han sufrido modificaciones desde su creación, con la intención de que pueden modelar sistemas más complejos, por la necesidad de adecuarlas a ciertas áreas en las cuales en principio no estaban pensadas o para subsanar carencias de descripción de los modelos.

Algunos tipos de las redes de Petri son:

- Redes de Petri temporizadas.
- Redes de Petri síncronas.
- Redes de Petri coloreadas.
- Redes de Petri estocásticas.

Cada uno de estos tipos de redes solventa la necesidad de descripción de algunos modelos elaborados a partir de las redes de Petri.

Por ejemplo las redes temporizadas surgen del hecho de asignarle un tiempo de procesamiento o de cumplimiento de una tarea que se lleva a cabo en una transición.

Las redes de Petri coloreadas simplifican el modelado considerando el hecho que varias de las etapas de un proceso tiene la misma estructura. Otro ejemplo importante, son las redes de Petri síncronas que derivan de la idea de tener un mecanismo que dispare una transición una vez que está habilitada.

## 1.2. Planteamiento del problema

¿Es posible obtener un modelo de redes de Petri para sistemas variantes en el tiempo, modelo que sea capaz de describir diferentes características relevantes cualitativas, como cuantitativas que nos proporcionen información necesaria para toma de decisiones y para llevar a cabo la acción de control sobre la evolución del sistema?

En las redes de Petri de manera manual el usuario activa el disparo de una marca o se deja como un barril sin fondo a disposición de la red de Petri para que use los recursos, eso lleva a que de manera no controlada los recursos puedan perderse, es decir, no se tiene control de la entrada al sistema, dado que las redes de Petri describen la evolución de este pero sin dejarnos la posibilidad de realizar algo más.

Además se supone que los recursos son idénticos, sin imperfecciones y que se transforman de la misma forma, de manera que se cumple cada etapa del proceso modelado sin contratiempos, sin pérdidas, con la misma calidad o estándares.

El problema a que nos enfrentamos es proponer un modelo de redes de Petri que describa sistemas dinámicos y que de facultades para tomar acciones dinámicas pertinentes, considerar entradas variantes en el tiempo y ponderar en algún sentido el desempeño de las transformaciones, operaciones y acciones que se llevan a cabo a lo largo del sistema.

### 1.3. Justificación

La investigación que se llevará a cabo permitirá obtener una herramienta que ayude a mejorar el modelado de sistemas dinámicos con diferentes escenarios y condiciones de operación, resaltando la diferencia entre los tipos de marcas, lugares, transiciones y arcos para que el proceso sea observado como una imagen gráfica de los estados que guardaría el sistema considerado.

De acuerdo a los conceptos ideales de la construcción de las redes de Petri, se observa la evolución del sistema asumiendo que se cuenta con infinitos recursos y una perfecta realización de cada etapa, sin requerir informar de cómo se realiza el proceso, su calidad y la toma de decisiones en la mejora continua.

Esto implicará que las redes de Petri que modelen sistemas reales, requerirán considerar dentro de ellas los peores escenarios bajo los cuales se cumple con sus objetivos.

En este proyecto estos supuestos son relevantes, ya que los recursos de producción son limitados, además de que el proceso tiene fallas requiriendo la toma de decisiones en línea para cumplir con sus objetivos. El ampliar las propiedades de la red de Petri, mejora la descripción de un sistema dinámico de manera teórica y simulada, lo que permite conocer su grupo de fallas, sus limitaciones, calidad y eficiencia de cada uno de sus subprocesos.

## 1.4. Objetivo de la tesis

El representar a un sistema por un grafo dirigido, permite visualizar la evolución de sus estados observables, no así su calidad, su desempeño, tiempo de desarrollo o conocer cuándo es necesaria la activación de los estados en su evolución discreta.

Es por ello la presente tesis, considera las condiciones cambiantes de los sistemas de manera más real para que la activación del marcaje se ajuste por retroalimentación y pueda diferenciar marcas de solo información, las cuales ayudarán verificar el correcto desempeño del sistema y en caso de no ser así efectuar acciones que nos ayuden a corregir errores de manera local y global.

Como objetivo principal se considera desarrollar un modelo de red de Petri con marcas variantes con retroalimentación para emular la incertidumbre del sistema con un procesos de selección dinámica.

## 1.5. Objetivos particulares

- Integrar elementos de la estructura de una red de Petri con retroalimentación de activación.
- Desarrollar una red de Petri con marcaje aleatorio.
- Modelar y cotejar las redes de Petri con retroalimentación de activación con las redes de Petri clásicas.

# Estado del arte

---

A lo largo de este capítulo se mencionan las diferentes redes de Petri que han surgido desde que Carl Adam Petri las definiera por primera vez en la década de los 60's.

Algunas de las redes de Petri que se contemplan son: redes de Petri extendidas, con prioridad, síncronas, temporizadas, coloreadas, continuas entre otras. Como se verá a lo largo del capítulo cada una de las redes de Petri surge de la necesidad de agregarles características que permitan una mejor descripción de los procesos que se intentan describir con este formalismo permitiendo obtener características de dichos procesos a partir de sus modelo.

Como último punto se mencionan los trabajos que se están realizando sobre las redes de Petri, que básicamente versan sobre aplicaciones que fueron modelados por medio de las diferentes redes y que el problema resolver es reducir la complejidad del método de análisis para que el costo computacional sea menor.

## 2.1. Redes de Petri discretas

Las redes de Petri fueron originadas de la disertación de la tesis doctoral de Carl Adam Petri que trataba sobre comunicación con autómatas en el año de 1962, inicialmente fueron usadas como una herramienta matemática de modelado con propósito general que describía las relaciones causales entre condiciones y eventos en un sistema de cómputo [10].

El mismo Carl Adam Petri en los años siguientes mantuvo el desarrollo de conocimiento sobre teoría relacionado con las redes de Petri [11][12]. Así mismo a principios de los 70's, las redes de Petri se convirtieron en un campo muy activo de investigación.

Durante este periodo, muchos de los científicos y estudiantes fueron gente relacionada a las Ciencias de la Computación y procesos de información, como consecuencia las primeras aplicaciones y teoría desarrollada sobre las redes de Petri provinieron de estas disciplinas [8][5].

Más tarde a las redes de Petri se les agregaron dos propiedades importantes y que caracterizaron a las redes de Petri como: redes de Petri extendidas y redes de Petri con prioridad.

Las redes de Petri extendidas contienen arcos especiales llamados como inhibidores. Un arco inhibidor es un arco dirigido, el cual deja un lugar  $P_i$  para alcanzar una transición  $T_j \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$ . El final de este arco se dibuja como un pequeño círculo, como se muestra en la figura 2.1. En esta figura, el arco inhibidor entre  $P_2$  y  $T_1$ , significa que la transición solo se habilitará si el lugar  $P_2$  no contiene ninguna marca. El disparo consiste en remover las marcas indicadas por el arco de cada uno de los lugares de entrada de  $T_1$ , con excepción de  $P_2$  para este ejemplo, y se depositan marcas a cada uno de los lugares de salida de  $T_1$ .

En la figura 2.1(a), la transición  $T_1$  no está habilitada porque  $P_1$  no contiene ninguna marca. En la figura 2.1(b),  $T_1$  no está habilitada porque  $P_2$  contiene una marca. En la figura 2.1(c) la transición  $T_1$  está habilitada y el marcaje obtenido después del disparo se observa en la figura 2.1(d).

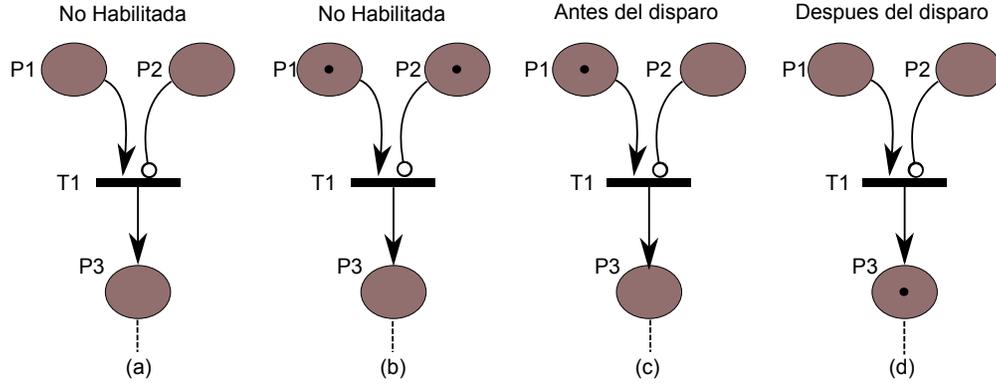


Figura 2.1: Transición con arco inhibitorio.

Por otro lado se tienen las redes de Petri con prioridad, este tipo de redes son usadas cuando se desea elegir entre un número de transiciones habilitadas, y que normalmente se presenta cuando se tiene conflicto estructural en la red. Este tipo de redes se compone de 1) una red de Petri y 2) una relación de orden parcial.

En la figura 2.2 se presenta una red de Petri con prioridad. Como se puede ver en la figura hay dos conflictos estructurales que son  $\langle P_1, \{T_1, T_2\} \rangle$  y  $\langle P_2, \{T_2, T_3, T_4\} \rangle$ . Una relación de orden estricto para las relaciones correspondientes es asignada para cada conflicto: i.e.,  $T_2 < T_1$  y  $T_4 < T_2 < T_3$  para este ejemplo de la figura. La relación  $T_i < T_j$  significa que  $T_i$  tiene prioridad sobre  $T_j \forall i, j \in \mathbb{Z}_+$  si ambas están habilitadas. Para el marcaje dado  $m_1 = (0, 1, 1)$  del ejemplo se tiene dos conflictos efectivos los cuales son  $\langle P_1, \{T_1, T_2\}, m_1 \rangle$  y  $\langle P_2, \{T_2, T_3\}, m_1 \rangle$  porque las transiciones  $T_1, T_2$  y  $T_3$  están habilitadas para el marcaje  $m_1$  (pero no  $T_4$ ). Dado que  $T_2 < T_1$  y  $T_2 < T_3$ , entonces tendremos que la transición  $T_2$  será la que se dispare.

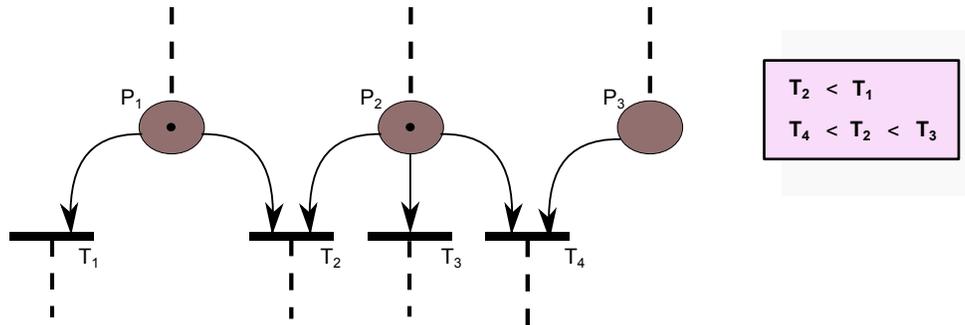


Figura 2.2: Prioridad en una red de Petri.

Las redes de Petri extendidas y redes de Petri con prioridad fueron mostradas respectivamente en [15][19]. Otras extensiones en donde los lugares contienen colas o pilas fueron propuestos en [29][30].

Como ya se comentó antes, las redes de Petri son un formalismo que se usa para descripción de sistemas asíncronos con evolución concurrente. De acuerdo con la interpretación adoptada, este formalismo puede ser usado para modelar fenómenos de flujo de información, de energía o de materiales [18], [13] y [11]. Sin embargo, estos modelos no están completos del todo para estudiar el desempeño de un sistema ya que no se toma en consideración el disparo de una transición en cuanto a su duración y al momento en el cual toma lugar, una vez que está habilitada.

Las redes de Petri temporizadas asociadas con una transición y con un lugar fueron introducidas respectivamente por C. Ramchandani [16] y J. Sifakis [17].

En la red de Petri es natural asociar un lugar a un estado que tiene cierta duración y asociar una transición a un cambio de estado, los cuales no tienen duración. Entonces se puede pensar en asociar la duración de alguna operación o estado con un lugar, y al tiempo de espera un evento para una transición que pueda ser disparada cuando éste ocurra.

La figura 2.3 representa un sistema compuesto por dos máquinas  $M_A$  y  $M_B$  en la cual cuatro clientes pasan alternativamente.

La máquina  $M_A$  tiene un solo servidor, mientras que  $M_B$  es una máquina con doble servidor (i.e. que dos clientes pueden ser procesados al mismo tiempo).

El tiempo de procesamiento de  $M_A$  es  $d_A$ , y el tiempo de procesamiento de los dos servidores de  $M_B$  es  $d_B$ . En la figura 2.3 el estado del sistema es el siguiente: La marca en  $P_1$  representa un cliente esperando por una operación en la máquina  $M_A$ , un cliente es procesado por la máquina  $M_A$  (la marca en  $P_2$ ), por consiguiente la máquina no está disponible (no hay marca en  $P_2'$ ) y la transición  $T_1$  no puede ser disparada. Un cliente es procesado por  $M_B$  (la marca en  $P_4$ ); un servidor de esta máquina permanece inactivo (marca en  $P_4'$ ) ya que no hay marca en  $P_3$ .

Los tiempos de operación  $d_A$  y  $d_B$  son asociados con los lugares  $P_2$  y  $P_4$ ; esto significa que una marca que llega al lugar  $P_2$  debe permanecer durante  $d_A$  antes de permitir el disparo de la transición  $T_2$  (durante este tiempo se dice que la marca no está disponible). De la misma forma, la marca situada en  $P_4$  permanece no disponible por  $d_B$ . En este ejemplo ninguna marca situada en  $P_1$ ,  $P_2'$ ,  $P_3$ , o  $P_4'$  es inmediatamente habilitada.

En la figura 2.3 el tiempo  $d_A$  y  $d_B$  puede ser determinístico o estocástico con distribución conocida para el caso estocástico. Para el caso determinístico el tiempo puede considerarse como una función que representa adecuadamente el tiempo en que se lleva a cabo el proceso que ésta inmerso en la transición dada. Para el caso estocástico solo se considera conocida la distribución a que obedecen el tiempo que tarda una transición en dispararse una vez que ésta sea habilitada con el marcaje adecuado.

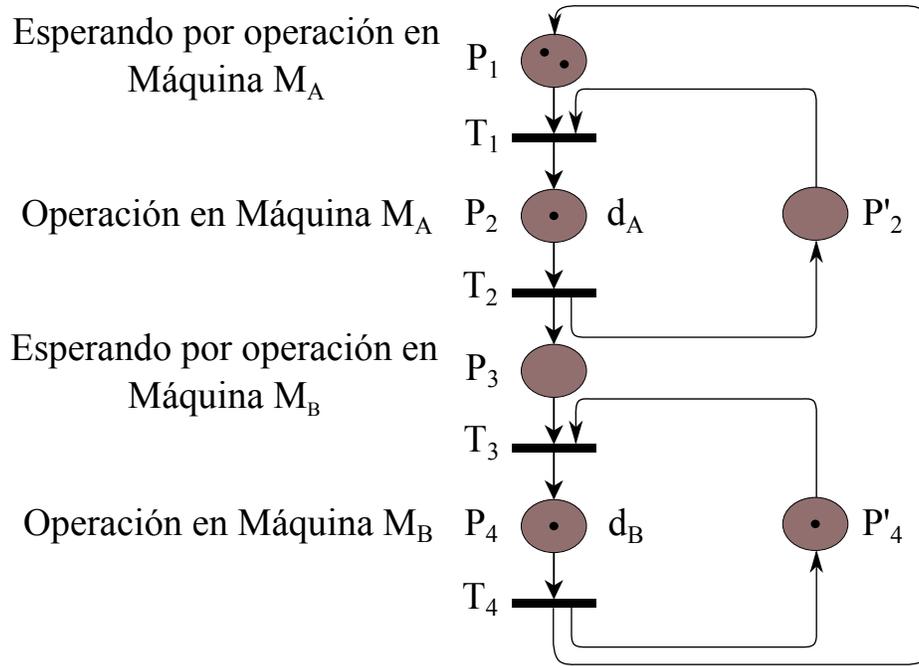


Figura 2.3: Sistema con operaciones temporizadas.

Varios autores han contemplado diferentes enfoques en los cuales el proceso de disparo es dividido en dos fases: Las marcas son removidas de los lugares de entrada, al instante del disparo y son depositadas en los lugares de salida al final del disparo después de un lapso de tiempo [20][21][23]. El desarrollo de las redes de Petri con tiempo constante fueron estudiadas en [25][24][17][16].

Por otro lado se tiene las redes de Petri estocásticas las cuales son redes de Petri temporizadas con la característica que el tiempo para este tipo de redes toma valores aleatorios. Las redes de Petri estocásticas fueron introducidas por S. Natkin y G. Florin [26][27] y su análisis fue estudiado en [28].

Las redes de Petri síncronas fueron estudiadas por M. Moalla y coautores [31][32][33]. La definición original de redes de Petri síncronas fue basado en la semántica de un solo servidor.

En una red de Petri autónoma una transición puede dispararse si está habilitada, pero lo que no se sabe es cuándo se va a disparar. En las redes de Petri

síncronas, un evento es asociado a cada transición, y el disparo de esta transición ocurrirá si la transición es habilitada, cuando el evento asociado ocurre.

Los eventos externos corresponden a un cambio en el estado del mundo externo (incluyendo el tiempo); por otro lado, un cambio en un estado interno, un cambio en el marcaje, podría ser llamado un evento interno. La presencia de un evento no tiene duración.

**Definición 2.1** *Una red de Petri síncrona es una tripleta  $\{R, E, Sync\}$  tal que:*

- *$R$  es una red de Petri con marcaje inicial.*
- *$E$  es un conjunto de eventos externos.*
- *$Sync$  es una función  $T \rightarrow E \cup \{e\}$  en donde  $T \in R$  y  $e$  es el evento que siempre ocurre.*

El conjunto de los eventos externos es  $E = \{E^1, E^2, \dots, E^n\}$  con  $i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{Z}_+$ , donde la notación  $E^i$  denota el nombre del evento. La notación  $E_j$  corresponde al evento asociado con la transición  $T_j$  con  $j = 1, 2, \dots, m, m \in \mathbb{Z}_+$ .

En la figura 2.4 se dan tres ejemplos que ilustran el concepto de una red de Petri sincronizada. En la figura 2.4(a), el evento externo  $E^3$  es asociado con la transición  $T_1$ , en este caso se dice que la transición  $T_1$  es receptiva al evento  $E^3$  (el evento en la imagen se ve como un línea vertical sombreada semejante a una delta de Dirac), ya que está habilitada. Podrá dispararse cuando el evento  $E^3$  ocurra, y será disparada inmediatamente.

En la figura 2.4(b), la transición  $T_2$  es receptiva al evento  $E^1$ , ya que está habilitada, ésta se disparará cuando el evento  $E^1$  ocurra. Por otro lado, la transición  $T_3$  no se dispara, a pesar de estar sincronizada con  $E^1$ , esto se debe a que la transición no está habilitada cuando  $E^1$  ocurre (esto es que  $T_3$  no es receptiva a este evento).

Por último en la figura 2.4(c) del mismo modo que los casos anteriores, la transición  $T_4$  es receptiva al evento  $E^2$ , ya que está habilitada, además podemos observar que la transición  $T_4$  está habilitada dos veces, esto implica

que puede ser disparada dos veces. Por consiguiente, cuando el evento  $E^2$  ocurre, la transición se dispara dos veces en un instante dado.

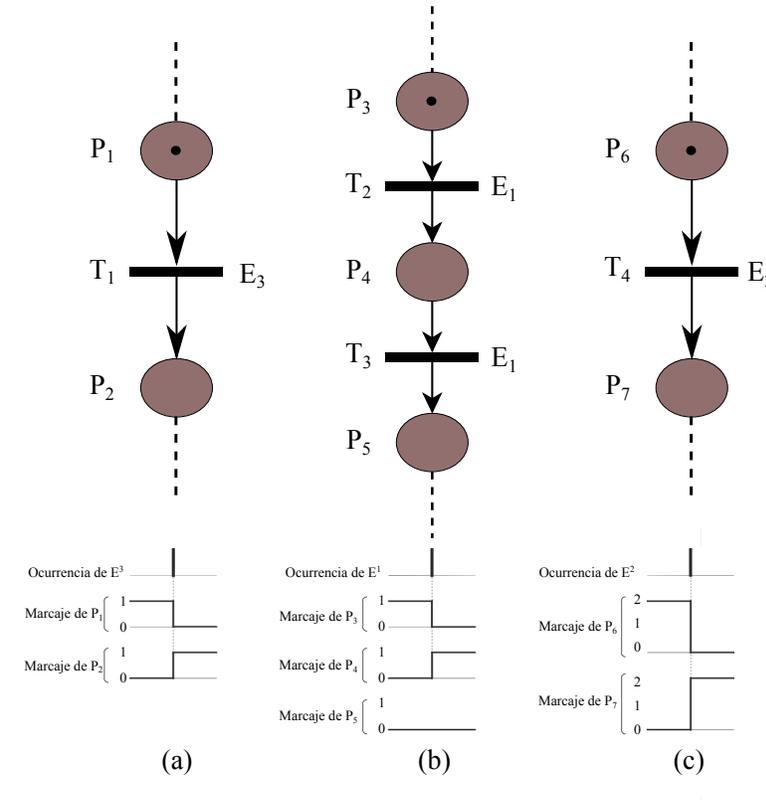


Figura 2.4: Principio de disparo de una transición síncrona.

En el año de 1981, K. Jensen introdujo el concepto de redes de Petri coloreadas (CPN), tomando como idea principal que en muchos de los sistemas, un número de diferentes procesos tienen una estructura y comportamiento similar, entonces para reducir la descripción y análisis de los sistemas era deseable poder tratarlos como procesos similares de manera uniforme y resumida [14].

En las CPN cada marca tiene asociado un color indicando la identidad de la marca. Por otra parte, cada lugar y cada transición tienen asociados un conjunto de colores. Una transición puede dispararse con respecto a cada uno

de sus colores.

Cuando se dispara una transición, las marcas son removidas y depositadas en los lugares de entrada y de salida de una forma normal como en las redes de Petri tradicionales, con la excepción de que la dependencia funcional es definida entre el color de la transición disparada y el color de las marcas involucradas.

A continuación, en la figura 2.5 se presenta un sistema donde intervienen dos vagones cuyo comportamiento es el siguiente: El vagón negro se mueve continuamente de izquierda a derecha entre los puntos  $I_N$  y  $D_N$ , después regresa a  $I_N$ , y así reiteradas veces. El vagón gris realiza el mismo comportamiento pero entre los puntos  $I_G$  y  $D_G$ .

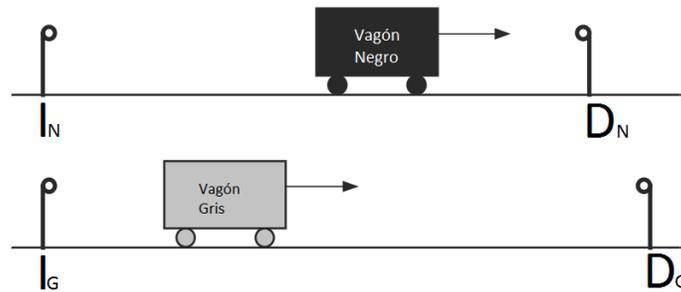


Figura 2.5: Sistema de dos vagones.

En la figura 2.6 se puede observar el modelo en una red de Petri del sistema de los dos vagones. En la figura 2.6(a) se muestran dos modelos con la misma estructura, esta estructura puede ser representada por un solo modelo superponiendo las dos partes de la figura 2.6(a). Sin embargo, es necesario identificar las marcas, etiquetándolas con colores, con el propósito de conservar la información concerniente a cada vagón.

Esto es representado por la red de Petri coloreada (CPN) en la figura 2.6(b). Los colores  $\{(n)\}$  y  $\{(g)\}$  son las etiquetas asociadas al vagón negro y al vagón gris respectivamente.

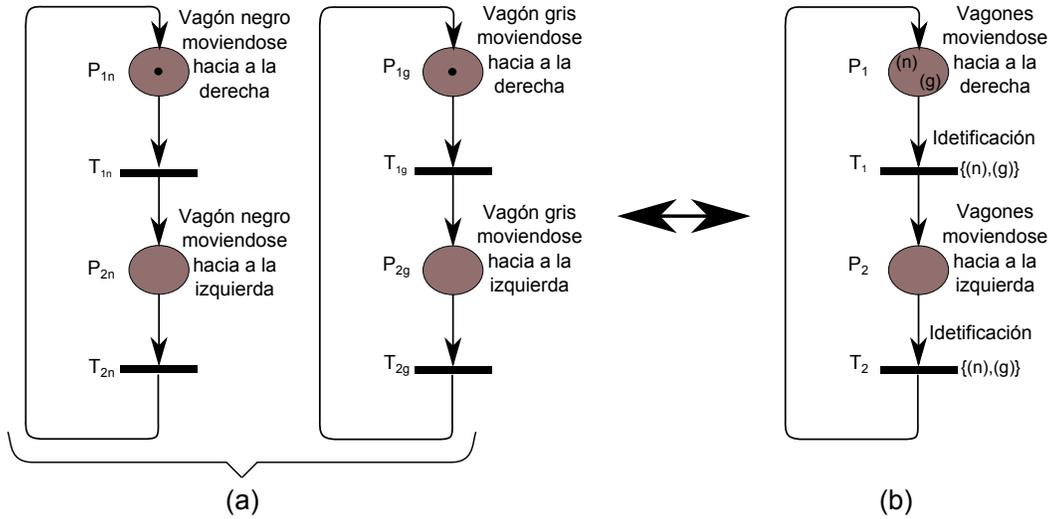


Figura 2.6: Modelo en redes de Petri (a)ordinarias, (b)coloreadas.

Las redes de Petri coloreadas por sí mismas se han vuelto un campo de investigación muy prolifero. Este tipo de redes de Petri al igual que las tradicionales, permiten representar el comportamiento de un sistema simple o complejo. La representación se forma a partir de elementos simples, relaciones y reglas. Ejemplos típicos de áreas de aplicación son protocolos de comunicación, teoría de grafos, problemas de transporte, sistemas de producción automatizada y análisis de flujo de trabajo entre otros.

También sobre este mismo tema se tienen las redes de Petri con predicados, las cuales son un tipo interesante de redes de Petri coloreadas [34]. El concepto de jerarquía y alto nivel relacionado con las redes de Petri coloreadas se puede ver en [35][36].

## 2.2. Redes de Petri continuas

Las redes de Petri continuas fueron introducidas en [37]. Una idea un tanto controvertida por el hecho de que este tipo de redes no eran discretas, propiedad fundamental de las redes de Petri tradicionales, finalmente fue aceptada y posteriormente los autores de este nuevo concepto más tarde publicaron un artículo donde demostraban que este tipo de redes eran un caso particular de las redes de Petri discretas [38].

El marcaje en un lugar en una red de Petri puede corresponder al estado de un dispositivo, esto es que, puede ser que el dispositivo esté o no esté habilitado. Este marcaje puede considerarse como una variable binaria.

Un marcaje puede también asociarse a un número entero, como por ejemplo el número de partes de una máquina. El problema al que se enfrenta uno es cuando el número entero es demasiado grande, esto da como resultado que el número de marcajes alcanzados sea grande, lo cual limita el uso práctico de las redes de Petri.

Las redes de Petri continuas son un modelo en el cual el número de las marcas en los lugares es un número real y no un número entero como se entendía antes. Existen una gran variedad de sistemas los cuales pueden ser modelados por este tipo de redes de Petri continuas.

**Definición 2.2** Una red de Petri continua es una 5-tupla  $RP = \{P, T, Pre, Post, m_0\}$  donde:

- $P$  es un conjunto finito de lugares con  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ .
- $T$  es un conjunto finito de transiciones con  $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_m\}$ .
- $Pre$  es la función de incidencia de entrada  $Pre : P \times T \rightarrow \mathbb{Q}_+$ .
- $Post$  es la función de incidencia de salida  $Post : P \times T \rightarrow \mathbb{Q}_+$ .
- $m_0$  es el marcaje inicial con  $m_0 : P \rightarrow \mathbb{R}_+$ .
- $\mathbb{R}_+$  y  $\mathbb{Q}_+$  corresponden respectivamente al conjunto de los números reales no negativos y al conjunto de los números irracionales no negativos.

- $Pre(p_i, t_i)$  es el peso del arco de  $p_i \rightarrow t_i$  que es un número racional positivo si el arco existe y vale 0 si no existe. De forma similar  $Post(p_i, t_i)$  es el peso de los arcos  $t_i \rightarrow p_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n, n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Definición 2.3** En una red de Petri continua, el grado de que una transición  $t_j$  esté habilitada por el marcado  $m$ , denotado por  $q$  o  $q(t_j, m)$  es un número real  $q$  tal que:

$$q = \min_{i: P_i \in t_j} \left( \frac{m(p_i)}{Pre(p_i, t_j)} \right) \text{ con } i, j \in \mathbb{Z}_+$$

**Definición 2.4** Sea  $m_k$  un marcado. El conjunto  $P$  de lugares puede dividirse en dos subconjuntos:  $P^+(m_k)$  el conjunto de lugares  $p_i$  tal que  $m_k(p_i) > 0$ , y  $p^0(m)$  el conjunto de lugares  $p_i$  tal que  $m_k(p_i) = 0$  con  $i, k \in \mathbb{Z}_+$ .

Un *macro-marcaje* es la unión de todos los marcajes de  $m_k$  con el mismo conjunto  $p^+(m_k)$  de lugares marcados. Un macro-marcajo será denotado por  $m_j^*$  con  $j, k \in \mathbb{Z}_+$ .

A continuación se ilustran estos conceptos e ideas con respecto a las redes de Petri continuas. En la figura 2.7 se tiene una mezcla que está compuesta por aceite y vinagre para preparar un aderezo francés.

Para cierta cantidad  $Q$  de aceite, una cantidad  $\frac{Q}{2}$  es usada y una cantidad  $1,5Q$  de mezcla se obtiene. Teniendo disponibles un litro de aceite y un litro de vinagre, el proceso se puede representar por una red de Petri continua como en la figura 2.7(b), donde  $m_0 = (1, 1, 0)$ . Las cantidades obtenidas al dispararse  $T_1$  se pueden observar en la figura 2.7(c), donde se puede apreciar como se reconfiguran las cantidades.

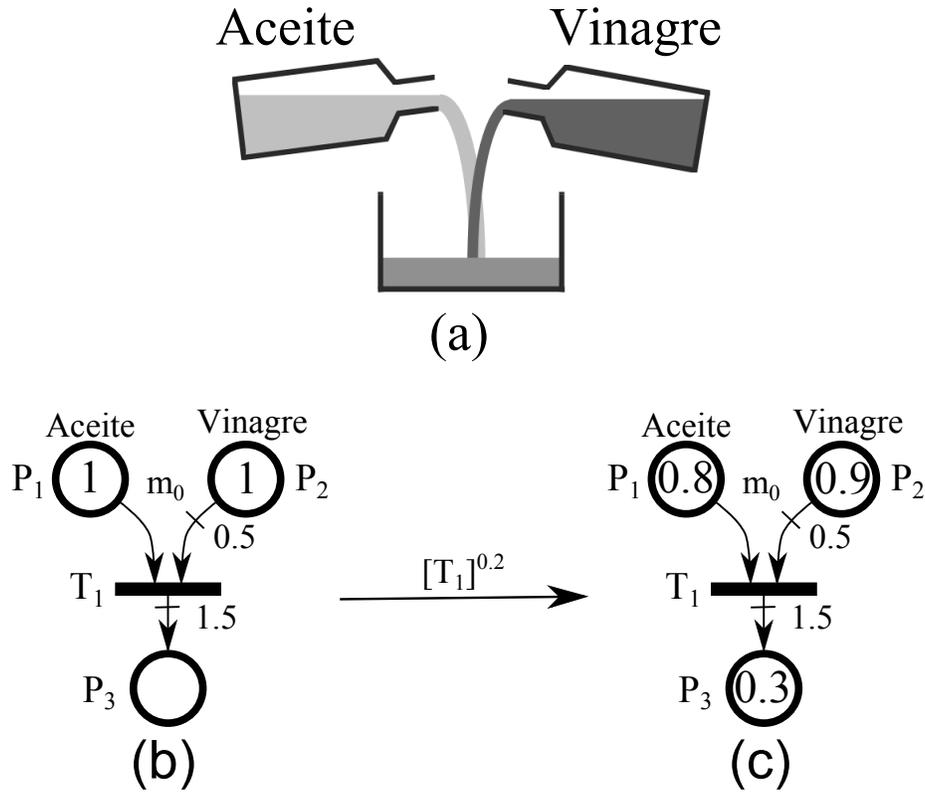


Figura 2.7: Mezcla modelada por una red de Petri continua.

Muchos trabajos han continuado surgiendo, más enfocados en el ámbito de aplicación, y en cuestión de reducir cierta complejidad en cuanto a los métodos de análisis de las redes de Petri.

Por ejemplo en [40] se describe una técnica para lograr un diagnóstico de fallas de un sistema continuo. Mientras que otros hacen comparaciones entre redes de Petri como en [41] donde concluyen que a largo plazo las redes de Petri estocásticas y continuas son equivalentes.

Siguiendo en este mismo contexto en [42] se presenta una aplicación en sistemas de factura flexible con redes de Petri híbridas (redes de Petri continuas y redes de Petri discretas) siendo el principal problema la optimización del programa a ejecutar, así mismo en [39] se usa este mismo tipo de redes híbridas para modelar tráfico en las autopistas. Por otro lado en [46] se presenta

un modelo de optimización y control con redes de Petri híbridas.

Por otro lado en las redes de Petri se tiene la fluidificación o relajación de las redes de Petri, que no es otra cosa la aproximación de sistemas discretos a través de modelos continuos para reducir la complejidad de análisis. El concepto fluidificación en las redes de Petri fue introducido en [43] y [44] con diferentes perspectivas. En [45] podemos encontrar buenos resultados para este mismo principio.

# Marco teórico

---

En este capítulo se describen conceptos básicos concernientes a esta tesis, como son las definiciones de las redes de Petri, así como también algunos conceptos de la teoría de la medida y por último lo que es el espacio de probabilidad.

Se inicia el capítulo con las redes de Petri que son la base de la presente tesis. Primero dando la definición de una red de Petri y después se presentan los métodos que existen para analizar una red de Petri en cuanto a su comportamiento y estructura. Una vez que se conocen las redes de Petri se pueden observar algunas carencias de descripción para modelar sistemas.

Seguido de lo que son los espacios con medida, concepto que nos permite ver a una red de Petri como un espacio que podemos medir en algún sentido, el cual nos permitirá obtener algunas características importantes al proponer que las marcas de una red de Petri tiene comportamiento aleatorio.

Por último se aborda lo que es proceso estocástico con el propósito de relacionar este concepto con el recorrido de las marcas a lo largo de una red de Petri.

Los temas que se mencionaron con antelación cubre un campo muy extenso cada uno de ellos, de manera que se abordarán solo los conceptos de cada uno de ellos que nos permitirán desarrollar la investigación.

### 3.1. Redes de Petri

Las redes de Petri están constituidas de un enfoque gráfico y uno analítico, a continuación presenta la definición matemática y en seguida los elementos gráficos que la componen.

**Definición 3.1** Una red de Petri está constituida por una 5 – tupla  $RP = \{P, T, F, W, M_0\}$

- $P$  es un conjunto finito de lugares  $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ .
- $T$  es un conjunto finito de transiciones  $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_m\}$ .
- $F$  es un conjunto de arcos o relación de flujo  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ .
- $W$  es una función de peso  $W : F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}, \forall n \in \mathbb{N}$ .
- $M_0$  es el marcaje inicial  $M_0 : P \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, m\}, \forall m \in \mathbb{N}$ .
- $P \cap T = \emptyset$  y  $P \cup T \neq \emptyset$

Cada uno de ellos tiene su representación gráfica como se observa en la figura 3.1.



Figura 3.1: Elementos de una red de Petri.

**Observación.** Una red de Petri con estructura  $N = (P, T, F, W)$  sin un marcaje inicial dado se denota simplemente como  $N$ .

**Observación.** Una red de Petri con un marcaje inicial dado se denota como  $(N, M_0)$ .

Las redes de Petri nos permiten modelar y analizar sistemas dinámicos de eventos discretos. Una red de Petri es un grafo dirigido bipartito, es decir, que tiene dos tipos de nodos en su estructura, en este caso son los lugares y las transiciones. Los lugares nos representan las variables que definen el estado del sistema y las transiciones son las transformaciones que se llevan a cabo dentro del mismo. Los lugares y las transiciones se conectan por medio de arcos y como restricción no pueden conectarse un lugar con otro lugar, ni una transición con otra transición.

El marcaje es un conjunto de puntos que nos representan la dinámica del sistema, distribuidos en los lugares, y que al disparo de cualquier transición esta distribución cambia pasando a un estado nuevo. La presencia de  $k \in \mathbb{N}^+$  marcas es interpretado como si se mantuviera verdadera la condición asociada con el lugar, otra interpretación es que  $k$  marcas son puestas en un lugar para indicar que  $k$  elementos de datos o recursos están disponibles.

Algunas interpretaciones que se les dan a los lugares y a las transiciones se ven en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Interpretaciones típicas de los elementos de una red de Petri

Lugares de Entrada	Transiciones	Lugares de Salida
Pre-condición	Evento	Post-condición
Datos de entrada	Operación	Salida de Datos
Señal de entrada	Procesamiento de señal	Señal de salida
Necesidad de recursos	Tarea	Liberación de recursos

Como ya se mencionó antes, la distribución de las marcas cambia a razón del disparo de las transiciones en una red de Petri, estos disparos se llevan a cabo si se cumplen ciertas reglas, las cuales se mencionarán enseguida.

1. Una transición  $t$  se dice que está habilitada si cada lugar de entrada  $p$  de  $t$  está marcada con al menos  $w(p, t)$  marcas, donde  $w(p, t)$  es el peso del arco que va de  $p$  a  $t$ .

2. Una transición habilitada puede dispararse o no puede dispararse (depende de que si el evento toma lugar en realidad).
3. Un disparo de una transición habilitada  $t$  remueve  $w(p, t)$  marcas de cada uno de los lugares de entrada de  $p$  a  $t$ , y deposita  $w(t, p)$  marcas a cada uno de los lugares de salida  $p$  a  $t$ , donde  $w(t, p)$  es el peso de los arcos de  $t$  a  $p$ .

Normalmente las transiciones tienen, tanto lugares de entrada como de salida, pero cuando no se cumple esto y una transición  $t$  no tiene lugares de entrada se le llama *transición fuente*, y cuando no tiene lugares de salida se le llama *transición sumidero*, de igual forma cuando en un lugar no tiene un arco de salida se le llama *lugar sumidero* y *lugar fuente* cuando no tiene algún arco de entrada. Esto implica que las transiciones sumideros siempre están habilitadas y que el disparo de una transición sumidero consume marcas pero no produce ninguna.

A continuación se muestra un ejemplo en la figura 3.2 donde se pueden observar los elementos que constituyen una red de Petri y como es que interactúan entre ellos. Cabe mencionar que entre los arcos no se indica algún peso, esto es porque cada uno de ellos tiene como peso la unidad.

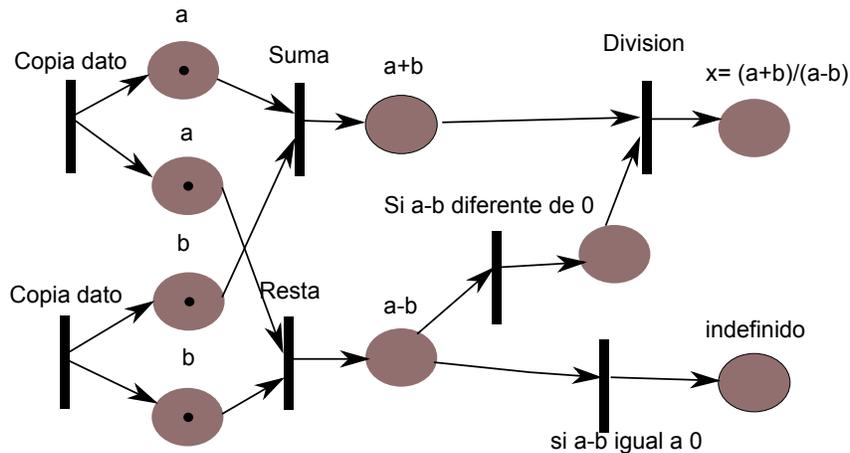


Figura 3.2: Modelo con redes de Petri del cómputo de  $x = (a + b)/(a - b)$ .

### 3.1.1. Propiedades de las redes de Petri

Una fortaleza de las redes de Petri es que se puede realizar análisis de muchas propiedades y problemas asociados a sistemas concurrentes. Dos tipos de propiedades pueden ser estudiados con un modelo en redes de Petri, aquellas que depende de un marcaje inicial (Propiedades dinámicas o de comportamiento) y aquellas que son independientes del marcaje inicial (Propiedades estructurales).

#### 3.1.1.1. Propiedades dinámicas

##### Alcanzabilidad

La alcanzabilidad es una de las principales propiedades dinámicas que tienen las redes de Petri. El disparo de una transición habilitada cambiara la distribución del marcaje de acuerdo a las reglas de disparo de una transición antes ya explicadas. Entonces diremos que un marcaje  $M_n$  es alcanzado desde un marcaje inicial  $M_0$ , si existe una secuencia de disparos de transiciones que nos transformen  $M_0$  en  $M_n$ . Una secuencia de disparos es denotado por  $\sigma = M_0 t_1 M_1 t_2 M_2 \cdots t_n M_n$  o también  $\sigma = t_1 t_2 \cdots t_n$ , en este caso se dirá que  $M_n$  es alcanzado por  $M_0$  a través de  $\sigma$ .

El conjunto de todos los posibles marcajes alcanzados a partir de  $M_0$  en una red  $(N, M_0)$  es denotado como  $R(N, M_0)$  o de forma simplificada  $R(M_0)$ . El conjunto de todas las secuencias de disparos desde  $M_0$  en una red  $(N, M_0)$  es denotado como  $L(N, M_0)$  o simplemente como  $L(M_0)$ . Entonces el problema se resume a encontrar sí el marcaje  $M_n \in R(M_0)$  para un marcaje  $M_0$  dado.

##### Acotamiento

Una red de Petri  $(N, M_0)$  se dice ser  $k$ -acotada o simplemente *acotada* si el número de marcas en cada lugar no excede un número finito  $k$  para cualquier marcaje alcanzable desde  $M_0$ , *i.e.*,  $M(p) \leq k$  para cada lugar  $p \in P$  y para cada  $M \in R(M_0)$ . Una red de Petri se dice ser segura si es 1-acotada.

### Vivacidad

El concepto de vivacidad está fuertemente relacionado con tiempos muertos en las operaciones de los sistemas. Una red de Petri se dice estar viva sí, no importa qué marcaje acaba de ser alcanzado desde  $M_0$ , es posible un último disparo de cualquier transición de la red para que siga evolucionando a alguna secuencia de disparos más, garantizando que la red está libre de tiempos muertos.

La vivacidad es una propiedad importante para varios sistemas, sin embargo es impráctico y demasiado costoso verificar esta propiedad para algunos sistemas en los que su funcionamiento es demasiado grande o involucra muchos elementos. Debido a esto se definieron diferentes niveles de vivacidad con el propósito de disminuir la carga de análisis de esta propiedad.

**Definición 3.2** Una transición  $t$  en una red de Petri  $(N, M_0)$  se dice:

- *muerta L0 – viva si  $t$  nunca es disparada en cualquier secuencia de  $L(M_0)$ .*
- *L1–viva (potencialmente disparable) si  $t$  puede ser disparada al menos una vez en alguna secuencia de disparos de  $L(M_0)$ .*
- *L2–viva si, dado un entero positivo  $k$ ,  $t$  puede ser disparado al menos  $k$  veces en alguna secuencia de disparos de  $L(M_0)$ .*
- *L3 – viva si  $t$  aparece una infinidad de veces o frecuentemente en alguna secuencia de disparos de  $L(M_0)$ .*
- *L4 – viva o viva si  $t$  es L1 – viva para cada marcaje  $M \in R(M_0)$ .*

### Reversibilidad

Una red de Petri  $(N, M_0)$  se dice ser reversible si, para cada marcaje  $M \in R(M_0)$ ,  $M_0$  es alcanzable desde  $M$ , así en una red que cumple con esta propiedad, uno siempre puede regresar al marcaje o estado inicial. Aunque resulte bueno poder regresar al estado inicial, muchas veces esto es imposible, sin embargo, uno puede establecer algún marcaje al que se quiere regresar (*home state*). Un marcaje  $M'$  se dice ser *home state* si, para cada marcaje

de  $M \in R(M_0)$ ,  $M'$  es alcanzable desde  $M$ .

### Cubrimiento

Un marcaje  $M$  de una red de Petri  $(N, M_0)$  se dice ser *cubierta* si existe un marcaje  $M' \in R(M_0)$ , tal que  $M'(p) \geq M(p)$  para cada  $p$  de la red. La propiedad de cubrimiento esta fuertemente relacionada con *L1 – viva* (potencialmente disparable). Sea  $M$  el mínimo marcaje necesario para habilitar una transición  $t$ . Entonces  $t$  es muerta (*no L1 – viva*) si y solo si  $M$  no es cubierta. Esto es,  $t$  es *L1 – viva* si y solo si  $M$  es cubierta.

### Persistencia

Una red de Petri  $(N, M_0)$  se dice persistente si, para cualesquiera dos transiciones habilitadas, el disparo de una de ellas no deshabilita a la otra. Una transición en una red con la propiedad de persistencia, una vez que se habilita, permanecerá habilitada hasta que se dispare. Persistencia está fuertemente relacionada con el echo de que la red quedará libre de conflictos.

#### 3.1.1.2. Propiedades estructurales

Las propiedades estructurales son aquellas que depende de su estructura o topología y no de algún marcaje inicial. Estas propiedades son de gran importancia cuando se diseñan sistemas de manufactura flexible, ya que estos sistemas dependen únicamente de la disposición y no de la forma que se administra el sistema, el cual no es conocido a nivel de diseño. Muchas de las propiedades pueden ser analizadas fácilmente por medio de técnicas algebraicas. Comenzaremos con la descripción de cada una de ellas.

### Vivacidad estructural

Una red de Petri se dice que es viva estructuralmente si existe un marcaje inicial  $M_0$  talque la red de Petri es viva. Esto implica que una red de Petri que es viva es viva estructuralmente también, pero lo inverso no necesariamente.

### Acotamiento estructural

Una red de Petri se dice que es acotada estructuralmente si es acotada para cualquier marcaje inicial  $M_0$ . Desafortunadamente las propiedades viva estructuralmente y acotada estructuralmente requieren de que la red permanezca acotada para todos los posibles marcajes iniciales, por otro lado una red de Petri que es acotada estructuralmente es acotada, pero lo inverso no necesariamente.

### Conservatividad estructural

Una red de Petri se dice que es conservativa estructuralmente si todas las transiciones que se disparan depositan el mismo número de marcas que consumen de los lugares de entrada a los lugares de salida.

### Repetitividad estructural

Una red de Petri se dice repetitiva estructuralmente si existe un marcaje inicial  $M_0$  y una secuencia de disparos  $\sigma$  en la cual cada transición aparece un número ilimitado de veces. De acuerdo con la definición, una red de Petri que es viva estructuralmente es repetitiva pero lo contrario no necesariamente se cumple.

## 3.1.2. Métodos de análisis

Los métodos de análisis de las redes de Petri se pueden clasificar en tres grupos: 1) técnicas enumerativas, 2) técnicas de reducción o descomposición, 3) técnicas estructurales. Cada método tiene ciertas características que los hacen adecuados para ciertas redes de Petri. Enseguida se describirán cada uno de ellos.

### Técnicas enumerativas

La técnica más conocida es el *árbol de cubrimiento* el cual se genera a partir de un marcaje inicial. Supongamos que se tiene una RP  $(N, M_0)$ , que parte de un marcaje inicial  $M_0$ , entonces podemos obtener tantas nuevas marcas como transiciones habilitadas se tiene con este marcaje. Desde cada nuevo

marcaje, podemos otra vez alcanzar más marcajes. Este proceso deriva en una representación en forma de árbol de las marcas. Los nodos representan las marcas generadas a partir de  $M_0$  raíz y sus sucesores, y cada arco representa una transición disparada, la cual transforma un marcaje en algún otro. El problema a que se enfrenta con esto, es que, el árbol puede crecer infinitamente para ciertas redes. Para evitar esto se introduce un elemento  $\omega$  que se puede interpretar como *infinito*,  $\omega$  tiene como propiedades las siguientes: Para cada entero  $n$ ,  $\omega > n$ ,  $\omega \pm n = \omega$  y  $\omega \geq \omega$ .

Se describe el algoritmo para generar el árbol de cubrimiento en el algoritmo 3.1.

**Algoritmo 3.1: Árbol de cubrimiento.**

Entrada:  $m_0, t_i$ . Salida:  $A_k$  Proceso:

Paso 1) La etiqueta del marcaje inicial, que es el raíz, se nombra como *new*

Paso 2) Mientras que en *new* existan marcas, hacer lo siguiente.

Paso 2.1) Seleccionar a un nuevo marcaje  $M$ .

Paso 2.2) Si  $M$  es idéntico a un marcaje del camino que va desde la raíz hasta el marcaje  $M$ , se etiqueta a  $M$  como *old* y se va a otro nuevo marcaje.

Paso 2.3) Si ninguna transición es habilitada con  $M$ , se etiqueta a  $M$  con *dead – end*.

Paso 2.4) Mientras exista una transición habilitada con  $M$ , se debe de hacer lo siguiente para cada una de las transiciones que se habilitan con  $M$ .

Paso 2.4.1) Obtener el marcaje  $M'$  que resulta del disparo de  $t$  con  $M$ .

Paso 2.4.2) Si desde el recorrido de la raíz a  $M$  existe un marcaje  $M''$  tal que  $M'(p) \geq M''(p)$  para cada lugar  $p$  y  $M' \neq M''$ , esto es,  $M''$  es cubierto, entonces reemplazamos  $M'(p)$  por  $\omega$  para  $p$  que cumpla con  $M'(p) > M''(p)$ .

Paso 2.4.3) Integrar a  $M'$  como nodo, dibujar un arco con la etiqueta  $t$  de  $M$  a  $M'$  y nombrar a  $M'$  como *new*.

En la figura 3.3 se puede observar una red con su respectivo árbol de cubrimiento. Se puede ver como es necesario un marcaje inicial para poder empezar a ejecutar el algoritmo, con forme se avanza en el algoritmo se puede notar que entra sean los elementos del modelo en redes de Petri, se vuelve mas complejo la creación de el árbol de cubrimiento. Es por eso que este método es viable para modelos con pocos componentes.

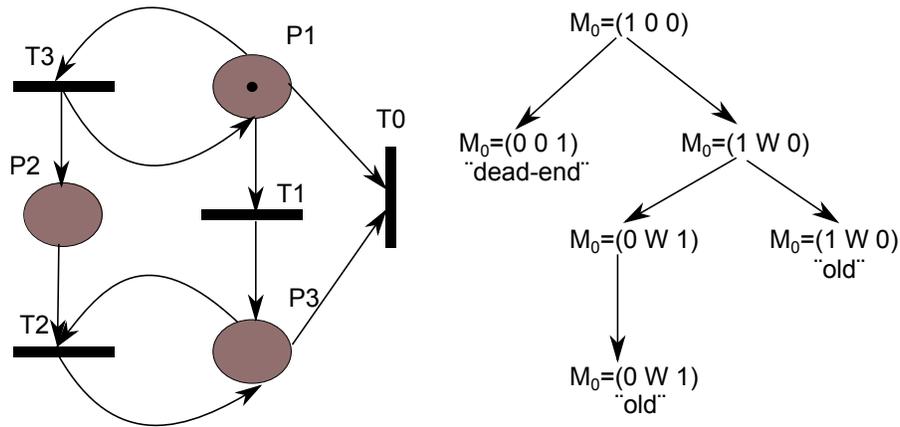


Figura 3.3: Una red de Petri con su respectivo árbol de cubrimiento.

### Técnicas de reducción

Este conjunto de técnicas se basa en la reducción del modelo por medio de transformaciones que no alteran las propiedades de los modelos una ves efectuadas éstas. En la figura 3.4 se pueden observar las transformaciones que se pueden llevar a cabo.

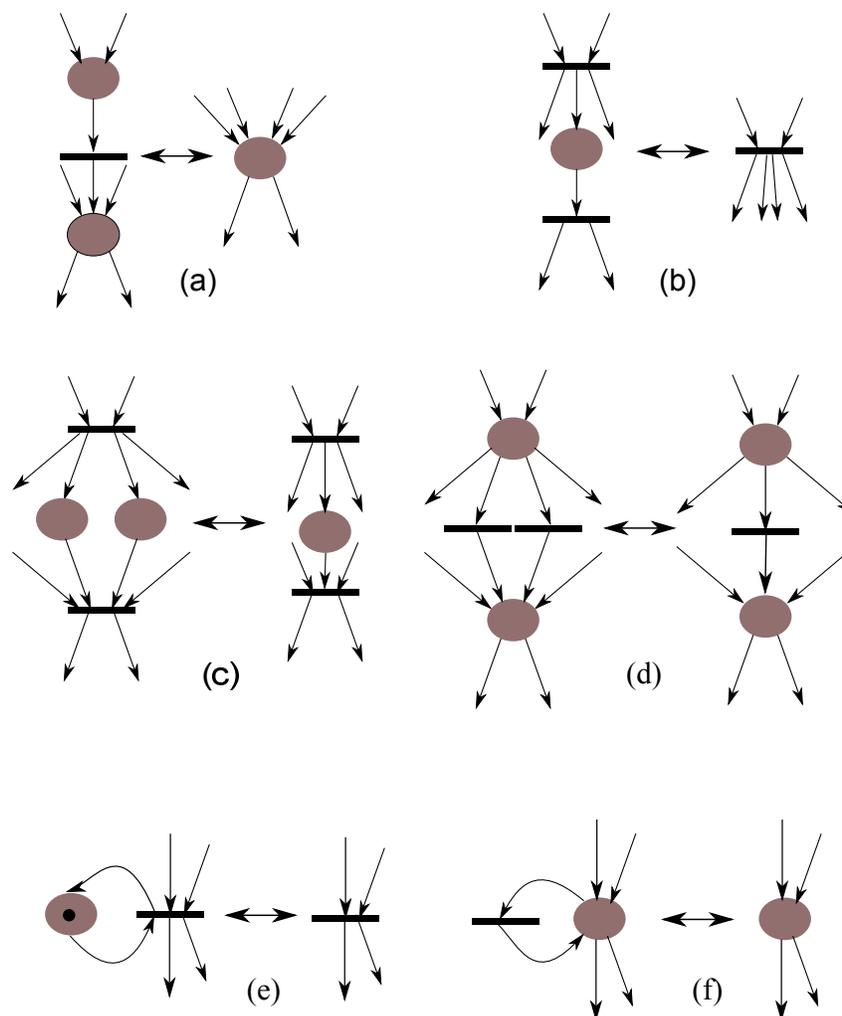


Figura 3.4: Transformaciones en una red de Petri

En la figura 3.4.(a) lo que sucede es que se elimina la transición y los dos arcos que entran al lugar de entrada de la transición, pasan a ser arcos de entrada del lugar de salida de la transición.

En la figura 3.4.(b) pasa algo similar a la figura 3.4.(a), solo que en este caso el lugar es el que se elimina, los arcos que tenía de entrada dicho lugar pasar a ser arcos de entrada de la transición que estaba conectada con el lugar eliminado.

En la figura 3.4.(c) lo que se hace es reducir el modelo considerando que los dos lugares que se encuentran en medio del modelo tiene el mismo número de arcos de entrada y el mismo número de arcos de salida. Estos mismo lugares entregan y reciben marcas de las mismas transiciones, es por eso que hacer esta reducción no cambia en nada el modelo más que en su tamaño.

En la figura 3.4.(d) es el mismo principio de reducción que el de la figura 3.4.(c) pero aplicado a transiciones.

En la figura 3.4.(e) se puede observar que el lugar genera un ciclo superfluo, de manera que quitarlo del modelo no afecta en nada, mas aun reduce tamaño del modelo a analizar.

En la figura 3.4.(f) se genera el mismo ciclo innecesario que en la figura 3.4.(e) pero en la transición de tal forma que podemos omitirlo del modelo y este no quedara alterado en lo mas mínimo.

### Técnicas estructurales

Una técnica que se usa mucho en este caso es la matriz de incidencia que se describe como sigue: Para una RP  $(N, M_0)$  con  $m$  transiciones y  $n$  lugares, la *matriz de incidencia* es una matriz de enteros de  $n \times m$ , llamada  $A = [a_{ij}]$ , donde  $a_{ij}$  esta definido en (3.1).

$$A_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^- \quad (3.1)$$

Donde  $a_{ij}^+ = w(i, j)$  que son los pesos de los arcos de las transiciones  $i$  a los lugares de salida  $j$ , y  $a_{ij}^- = w(j, i)$  que son los pesos de los arcos de los lugares de entrada  $j$  a las transiciones  $i$ . Entonces la ecuación de estados de una red de Petri dado un marcado inicial y una secuencia de disparos de transiciones habilitadas es (3.2) .

$$M_d = M_0 + AU_k \quad (3.2)$$

Donde  $M_d$  es un vector columna  $n \times 1$ ,  $U_k$  es el vector de control o vector de disparos con dimension  $m \times 1$ , la matriz  $A$  es la matriz de incidencia y es

donde se observa la dinámica del marcaje de la red.

Consideremos la red de Petri de la figura 3.5, tenemos que para este modelo la matriz de incidencia se forma a partir de (3.5).

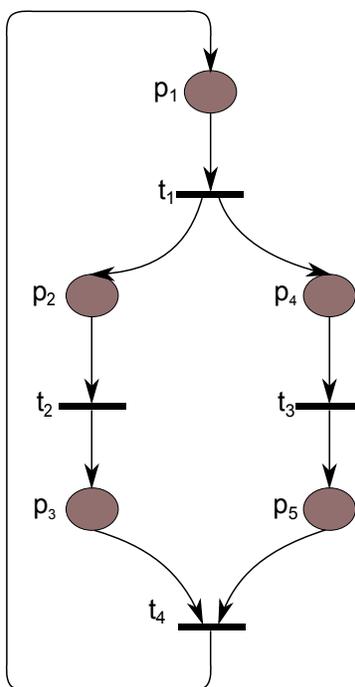


Figura 3.5: Modelo de una red de Petri.

$$a_{ij}^- = \begin{matrix} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & P_1 \\ & P_2 \\ & P_3 \\ & P_4 \\ & P_5 \end{matrix} \quad (3.3)$$

$$a_{ij}^+ = \begin{array}{cccc|c} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] & P_1 \\ & & & & P_2 \\ & & & & P_3 \\ & & & & P_4 \\ & & & & P_5 \end{array} \quad (3.4)$$

Considerando (3.1) queda:

$$A = \begin{array}{cccc|c} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & \\ \left[ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{array} \right] & P_1 \\ & & & & P_2 \\ & & & & P_3 \\ & & & & P_4 \\ & & & & P_5 \end{array} \quad (3.5)$$

Recordando que (3.5) se forma a partir de (3.3) y de (3.4) de la relación (3.1). Ahora para nuestro ejemplo tomemos como marcaje inicial  $M_0 = (0, 0, 1, 1, 0)$ , como resultado tendremos la figura 3.6.

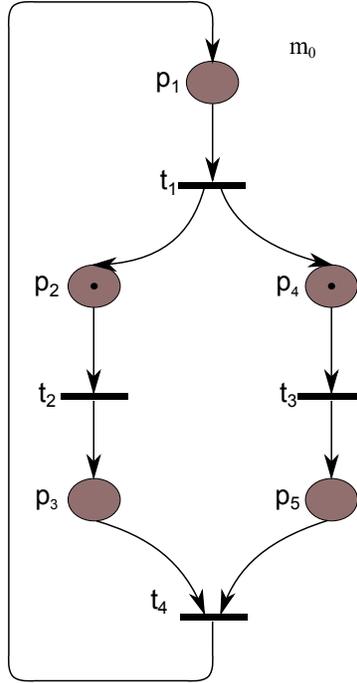


Figura 3.6: Estado inicial de la red con  $M_0$ .

Considerando un vector de control de la forma  $U_k = [0, 1, 0, 1]^T$ , entonces por (3.2) del ejemplo dado, con un marcado inicial  $M_0$  y una secuencia de disparos de transiciones  $U_k$  resulta (3.6).

$$M_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Entonces el marcaje obtenido a partir de  $M_0$  y del disparo de la transición  $T_2$  se puede observar en la figura 3.7.

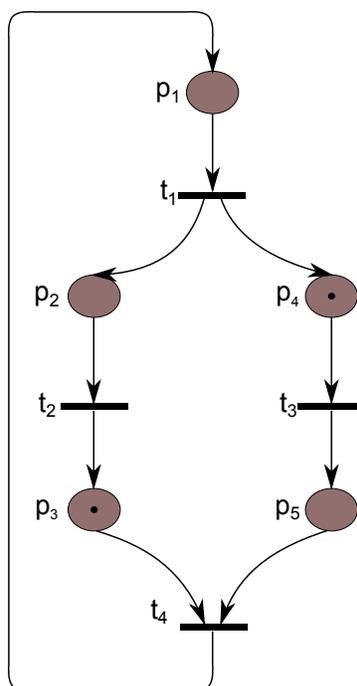


Figura 3.7: Estado de la red con  $M_0$  y  $U_k$ .

Ahora tomemos el marcaje anterior obtenido en (3.6) y una secuencia de disparos  $U'_k$ , sustituyendo en (3.2) se tiene (3.7).

$$M'_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

En la figura 3.8 podemos ver el estado de la red con el marcaje  $M'_d$ .

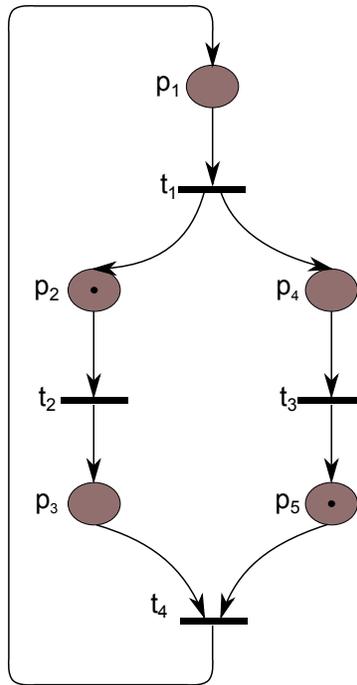


Figura 3.8: Estado de la red con  $M_d$  y  $U'_k$ .

## 3.2. Espacio con medida

El concepto de *medir* se asume como un hecho, se concibe como algo que por añadidura se tiene, una herramienta con la que se cuenta para caracterizar algunas cualidades de ciertos objetos. Toda esta conceptualización tiene de trasfondo en lo que respecta a las matemáticas una estructura fija y directa que ha permitido obtener muchos resultados en el análisis matemático.

Esta estructura es una terna de elementos  $(\Omega, \sigma\text{-álgebra}, \mu)$  donde:

1)  $\Omega$  es un conjunto de elementos arbitrarios, del cual queremos medir en alguna forma algunos de sus subconjuntos.

2)  $\sigma\text{-álgebra}$  es una colección  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$  que cumple con las siguientes propiedades.

2.1  $\Omega \in \mathcal{F}$ .

2.2 Si  $A \in \mathcal{F}$ , entonces  $A^c \in \mathcal{F}$ .

2.3 Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ .

Una  $\sigma\text{-álgebra}$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega$  no vacía, que es cerrada bajo las operaciones de complemento y uniones numerables, lo cual implica que también las operaciones de intersección y diferencia sean cerradas por medio de las leyes de Morgan.

A la dupla  $(\Omega, \mathcal{F})$  se le llama espacio medible, donde  $\Omega$  es un conjunto y  $\mathcal{F}$  es una  $\sigma\text{-álgebra}$  y los elementos de  $\mathcal{F}$  se les da el nombre de conjuntos medibles.

3)  $\mu$  es una función (*medida*) en un espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$  no negativa.

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$$

que satisface:

3.1  $\mu(\emptyset) = 0$ .

3.2 Es numerable aditiva, es decir si dados  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  y sean ajenos dos a dos, esto es  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  entonces.

$$\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Para concluir esta sección se definirá el *Espacio de Probabilidad*, importante en nuestro caso, dado que mucho del desarrollo que se lleva a cabo en lo ulterior es a partir de este espacio.

### 3.2.1. Espacio de probabilidad

En espacio de probabilidad el conjunto  $\Omega$  denota el espacio muestral o conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio, y los elementos de  $\mathcal{F}$  representan eventos del experimento aleatorio. Una  $\sigma$ -álgebra es entonces una estructura que nos permite agrupar ciertos subconjuntos de  $\Omega$  de interés, aquellos a los cuales se desea calcular su probabilidad, y esta estructura constituye el dominio de definición de una medida de probabilidad. Cuando el espacio muestral es finito normalmente se toma como  $\sigma$ -álgebra el conjunto potencia de  $\Omega$ , pero para espacio muestrales más generales no siempre puede tomarse esa estructura tan grande, y deben considerarse entonces  $\sigma$ -álgebra más pequeñas, es por ello que se estudian estas estructuras. En general existen varias  $\sigma$ -álgebra que pueden asociarse a un conjunto cualquiera no vacío  $\Omega$ .

La característica de *probabilidad* de este espacio métrico estriba en la definición de la función de medida  $\mathcal{P}$  que es una función  $\mathcal{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  que cumple con:

1.  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ .
2.  $\mathcal{P}(A) \geq 0$ , para cualquier  $A \in \mathcal{F}$ .
3. Sea  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  y sean ajenos dos a dos, esto es  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  entonces  $\mathcal{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathcal{P}(A_i)$ .

Cabe comentar que estos son los tres axiomas con los que A. Kolmogorov definió lo que es la probabilidad, dando un gran paso, pasando de la teoría de probabilidad frecuentista a una axiomática, trayendo así que muchos de los matemáticos empezaran a mirar con mejores ojos esta disciplina que en principio se consideraba inexacta y poco atractiva para los matemáticos.

### 3.3. Proceso estocástico

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias indexadas con los números naturales (*Proceso estocástico discreto*) de forma finita o de forma infinita contable, o con los números reales (*Procesos estocástico continuo*). Muchos autores como convención les llaman series de tiempo a los procesos estocásticos discretos, mientras que a los procesos estocásticos continuos simplemente procesos estocásticos.

**Definición 3.3** *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias  $\{\mathcal{X}(t, w) : t \in \mathbb{I}, w \in \Omega\}$  donde  $\mathbb{I}$  es un conjunto de parámetros (continuos o discretos) y  $\mathcal{X}(t, w) \in \mathbb{R}$ .*

Un proceso estocástico se puede pensar de dos formas. Primero para un valor fijo de  $t \in \mathbb{I}$ ,  $\mathcal{X}(t, w)$  es una variable aleatoria, por otro lado si fijamos a  $w \in \Omega$ ,  $\mathcal{X}(t, w)$  es una función de valores reales, y en la que cada muestra de esta función se le conoce como realización, trayectoria o simplemente muestra.

En la figura 3.9 se muestra la gráfica de un proceso estocástico discreto, en el mundo real podemos encontrar estos procesos discretos por ejemplo cuando se envía una secuencia de bits por un canal ruidoso, otro ejemplo podría ser la lectura de salida de un amplificador, que a pesar de no recibir ninguna señal su salida no es cero debido al ruido interno térmico del dispositivo y que en teoría este ruido se puede modelar por medio de una variable aleatoria gaussiana, en este último ejemplo el proceso se considera discreto debido a que cada segundo se hace una medición de la salida del amplificador.

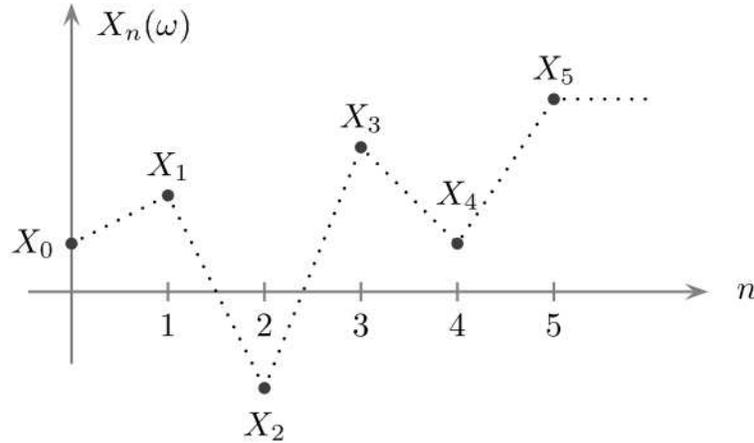


Figura 3.9: Proceso estocástico discreto.

Por otro lado en la figura 3.10 podemos observar un proceso estocástico continuo, este tipo de procesos los podemos encontrar por ejemplo en comunicación por radio, la señal portadora es frecuentemente modulada como onda sinusoidal con fase aleatoria esto es porque el receptor no sabe cuando el transmisor va a emitir información, otro ejemplo sería las mediciones que arroja un sismógrafo.

Se puede apreciar de la figura 3.10 la función que se genera se mueve dentro de los números reales, tanto el dominio como el contradominio, teniendo así una infinidad variables aleatorias indexadas.

La definición que se acaba de dar es muy general, a partir de esta idea se estudian ciertos casos particulares, en lo que respecta a esta tesis los procesos estocásticos de interés son: *Proceso de Poisson* y *Procesos de Wiener (Movimiento Browniano)*.

### 3.3.1. Proceso de Poisson

Es frecuente tener la necesidad de definir una variable aleatoria que se defina como el número de eventos que ocurren dentro de un determinado intervalo, por ejemplo para saber el número de defectos que tiene algún ar-

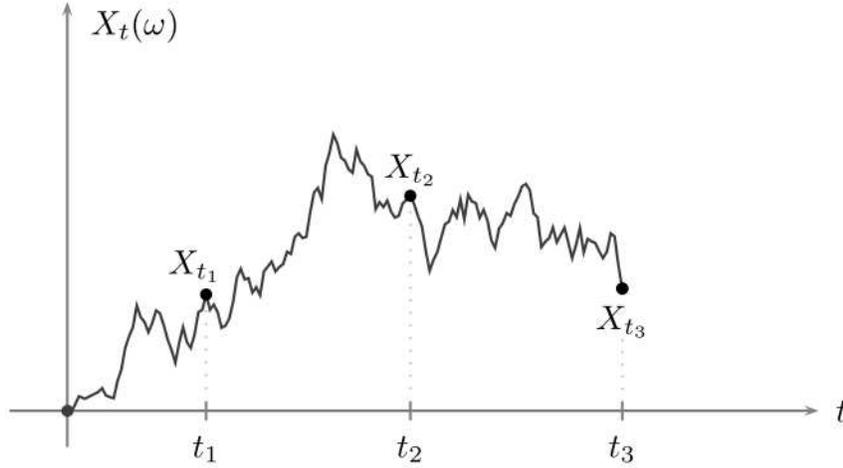


Figura 3.10: Proceso estocástico continuo.

título o el número de llamadas recibidas por un operador dentro de un lapso de tiempo. La distribución de *Poisson* es un herramienta para modelar este tipo de comportamientos.

Una variable aleatoria con distribución de Poisson con parámetro  $\lambda$  se escribe  $\mathcal{X} \sim P(\lambda)$ , tiene una función de distribución (3.8), para  $x = 0, 1, \dots$

$$P(\mathcal{X} = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \quad (3.8)$$

**Definición 3.4** Sea  $\{\mathbb{F}\}$  una colección de  $\sigma$  – algebras filtrada (una colección de conjuntos indexados de una sigma-álgebra dada). Un proceso de Poisson es un proceso estocástico con función de distribución  $\mathcal{X} \sim P(\lambda)$ , que cumple con las siguientes condiciones.

- 1)  $X_0 = 0$  casi siempre.
- 2) Las trayectorias de  $X_t$  son continuos por la derecha con limites por la izquierda.
- 3) Si  $s < t$ , entonces  $X_t - X_s$  es un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda(t - s)$ .

4) Si  $s < t$ , entonces  $X_t - X_s$  es independiente de  $\mathbb{F}$ .

### 3.3.2. Proceso de Wiener

El fenómeno conocido como *movimiento browniano* data del año 1828 cuando el botánico Robert Brown reportó en una revista científica que granos de polen suspendidos en cierta substancia y vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable.

De este fenómeno se desprenden algunas propiedades: (a) El movimiento es continuo, (b) Parece tener desplazamientos independientes, (c) Debido al gran número de colisiones del grano de polen con las moléculas circundantes en longitud de tiempo no pequeño, y teniendo en cuenta el teorema del límite central, los incrementos pueden modelarse como variables aleatorias gaussianas.

Esto escrito anteriormente se traduce matemáticamente en la definición 3.5:

**Definición 3.5** *Un movimiento browniano unidimensional es un proceso estocástico  $\{\mathbb{B}_t : t \geq 0\}$  tal que:*

- 1)  $\mathbb{B} = 0$  casi seguramente.
- 2) Las trayectorias  $t \mapsto \mathbb{B}_t$  son continuas.
- 3) El proceso tiene incrementos independientes.
- 4) La variable  $\mathbb{B}_t - \mathbb{B}_s$  tiene distribución normal  $\mathcal{N}(0, t - s)$  para  $0 \leq s < t$ .

Las condiciones que aparecen en la definición son consecuencia directa de las observaciones del fenómeno físico, pero esto no implica que exista tal objetivo matemático. En 1923 el matemático norteamericano Norbert Wiener demostró la existencia de un proceso con estas condiciones, y es por eso que este proceso se le conoce como proceso de *Wiener* y el cual se denota como  $\{\mathbb{W}_t : t \geq 0\}$ .

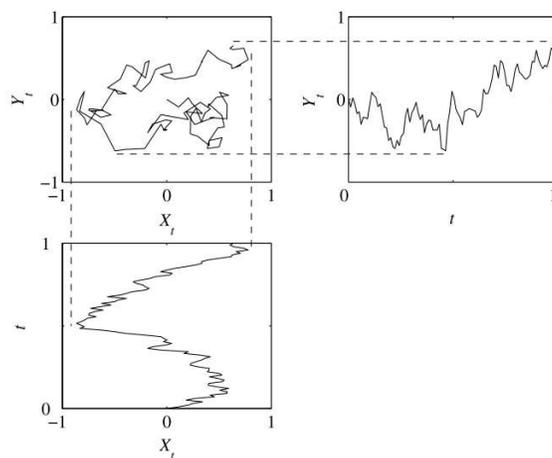


Figura 3.11: Movimiento browniano de dos dimensiones.

El proceso de Wiener cuenta con tres propiedades interesantes a mencionar.

1. La distribución de probabilidad de todos los valores futuros del proceso depende únicamente de su valor actual, no siendo afectada por sus valores pasados, ni por ninguna otra información actual. Por tanto, el valor actual del proceso es la única información necesaria para realizar la mejor estimación de su valor futuro.
2. Tiene incrementos independientes. Lo que significa que la distribución de probabilidad de los cambios en el proceso en cualquier intervalo temporal es independiente de la de cualquier otro intervalo.
3. Las variaciones producidas en el proceso en un intervalo finito de tiempo se distribuyen normalmente, con una varianza que aumenta linealmente con el tamaño del intervalo temporal.

# Red de Petri con marcaje aleatorio

---

Como solución a una nueva formulación de sistemas dinámicos mediante el modelado de redes de Petri se propone realizar algunas modificaciones en algunos de los elementos de las redes de Petri con el propósito de tener una herramienta que describa de una forma más adecuada un proceso, de tal manera que la re-definición de la red de Petri queda establecida en la definición 4.1.

Para este capítulo de desarrollo se comienza con la definición de una red de Petri con marcaje aleatorio partiendo de la base de las redes de Petri clásicas. Se definen cada uno de los elementos que conforman esta nueva red de Petri justificando el porque de esta nueva definición.

De igual forma se consideran nuevos aspectos en las reglas con el propósito de adecuarlas a las nuevas características aleatorias que tienen los lugares, transiciones y marcas. Para describir la evolución del marcaje a presencia se alguna entrada aleatoria se propone la descripción en forma matricial por medio de la matriz de incidencia en donde los arcos cambian de manera dinámica a respuesta de cierta entrada que se presenta en la red de Petri con marcaje aleatorio.

## 4.1. Definición de la red de Petri con marcaje aleatorio

**Definición 4.1** *Una red de Petri con marcaje aleatorio ( $RP_{ma}$ ) está compuesta por una 5 – tupla dada en 4.1.*

$$RP_{ma} = \{P, T, F, W, M_0\} \quad (4.1)$$

Donde se cumple:

- I)  $P$  es el espacio de probabilidad de lugares con  $P := \{\Omega_p, \sigma_p, \mu_p\}$ .
- II)  $T$  es el espacio de probabilidad de transiciones con  $T := \{\Omega_T, \sigma_t, \mu_t\}$ .
- III)  $F$  es un conjunto de arcos o relación de flujo continuo estocástico con  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ .
- IV)  $W$  es la función de marcaje con  $W := F \rightarrow \mathbb{R}$ .
- V)  $M$  es el espacio de probabilidad de marcas de la red con  $M := \{\Omega_M, \sigma_m, \mu_m\}$ .

### Espacio de probabilidad P

El espacio  $P$  compuesto por tres elementos 1.1), 1.2), 1.3).

1.1)  $\Omega_p$  Conjunto universo de lugares de  $RP_{ma}$  con  $\Omega_p = \{p_1, p_2, \dots, p_n : n \in \mathbb{N}_+ \text{ y } n < \infty\}$ .

1.2)  $\sigma_p =$  Es una colección de subconjuntos de  $\Omega_p$  tal que:

- I)  $\Omega_p \in \sigma_p$ .
- II) Sea  $A \in \sigma_p$  entonces,  $A^c \in \sigma_p$ .
- III) Sea  $A_1, A_2, \dots, A_m \in \sigma_p$  tal que  $\cup_{i=1}^m A_i \in \sigma_p$ .

La mínima  $\sigma$ -álgebra ( $\sigma_{min}$ ) de un conjunto arbitrario es  $\sigma_{min} = \{\Omega, \emptyset\}$ . Para el caso particular de  $\sigma_{min}$  solo tenemos la facultad de medir todo el conjunto de lugares como un todo.

En una  $\sigma$ -álgebra están contenidos conjuntos de interés para medir. Resulta razonable agrupar como subconjuntos al conjunto de lugares de entrada de cada transición que existe en  $RP_{ma}$ , y tomar por complemento de estos conjuntos a todos los demás lugares formando el espacio de las variables aleatorias  $(\Omega, \sigma)$ .

Para ejemplificar lo antes mencionado, supóngase un modelo como se muestra en la figura 4.1, a partir del cual su  $\sigma_p$ -álgebra es (4.2).

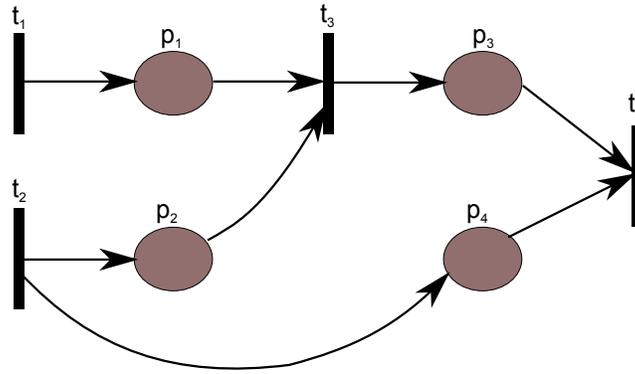


Figura 4.1: Modelo de una red Petri con marcaje aleatorio.

$$\sigma_p = \{\{p_1, p_2\}, \{p_3, p_4\}, \Omega, \emptyset\}, \text{ con } \Omega = \{p_1, p_2, p_3, p_4\} \quad (4.2)$$

La  $\sigma_p$ -álgebra obtenida está compuesta por cuatro elementos, donde el complemento de  $\{p_1, p_2\}$  es  $\{p_3, p_4\}$  y viceversa. Esta  $\sigma_p$ -álgebra se obtiene fácilmente considerando que los lugares de entrada a la transición  $t_3$  son  $p_1$  y  $p_2$ , y para la transición  $t_4$  son  $p_3$  y  $p_4$ . Para el caso de las transiciones  $t_1$  y  $t_2$  como son transiciones fuente o transiciones de entrada, no es posible tener lugares de entrada a éstas, por eso no es necesario tomarlas como criterio para construir nuestra  $\sigma_p$ -álgebra.

La  $\sigma$ -álgebra esta formada por una colección de *sub* $\sigma$ -álgebras, puede haber distintas  $\sigma$ -álgebra de un mismo conjunto universo implicación directa de la definición. Entonces la  $\sigma$ -álgebra va a depender del interés que se tenga en el momento.

1.3)  $\mu_p = \sigma_p \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad con:

- 1)  $\mu_p(\Omega_p) = 1$ .
- 2)  $\mu_p(A) \geq 0 \forall A \in \sigma_p$ .
- 3) Sea  $A_1, A_2, \dots, A_m \in \sigma_p$  y sean ajenos dos a dos, esto es  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  entonces  $\mu_p(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu_p(A_i)$ .

Haciendo referencia al Capítulo 3, existen varias funciones que cumplen las propiedades recién mencionadas. La elección de alguna de ellas dependerá del problema, es decir la naturaleza del problema determina cual distribución de probabilidad es apropiada.

Considerando que los lugares son elementos acotados por una distribución de Gauss donde se observan las transformaciones que sufre el marcaje a lo largo de la  $RP_{ma}$  y que se describen en (4.3).

$$\mu_p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(p_i - \mu)^2}{2\tau^2}} dp \quad (4.3)$$

para  $i = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{Z}_+$

Donde:

$\tau$  es la desviación estándar.

$p_i$  es el marcaje del lugar  $p_i \forall i = \{1, 2, \dots, m\}, m \in \mathbb{Z}_+$ .

$\mu$  es la media aritmética.

### Espacio de probabilidad T

El espacio  $T$  compuesto por tres elementos tales que se cumplen 2.1), 2.2), 2.3).

2.1)  $\Omega_t$  conjunto universo de lugares de  $RP_{ma}$  con  $\Omega_t = \{t_1, t_2, \dots, t_m : m \in \mathbb{Z}_+ \text{ y } m < \aleph_0\}$ .

2.2)  $\sigma_t$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega_t$  tal que:

- $\Omega_t \in \sigma_t$ .
- Sea  $B \in \sigma_t$  entonces  $B^c \in \sigma_t$ .
- Sea  $B_1, B_2, \dots, B_m \in \sigma_t$  tal que  $\cup_{i=1}^m B_i \in \sigma_t$ .

Para definir la  $\sigma_t$ -álgebra asociada a este espacio de probabilidad, se tomará la  $\sigma_t$ -álgebra generada por la colección de transiciones que tienen lugares de entrada. De manera que retomando el ejemplo de la figura 4.1 la colección de subconjuntos de  $\Omega_t$  sería (4.4).

$$\begin{aligned} C = \{T_3, T_4\} \text{ entonces la } \sigma_t\text{-álgebra generada es.} \\ \sigma_t(C) = \{T_3, T_4, T_3^c, T_4^c, (T_3 \cup T_4), (T_3 \cup T_4)^c, \Omega_t, \emptyset\}. \quad (4.4) \\ \text{con } \Omega_t = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, T_3 = \{t_3\} \text{ y } T_4 = \{t_4\}. \end{aligned}$$

La construcción de la sigma-álgebra partió del hecho de que entre las transiciones no tienen relación alguna más que cuando hay una relación de conflicto entre dos transiciones.

2.3)  $\mu_t = \sigma_t \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad con:

Al igual que la medida del espacio de probabilidad T y de cualquier medida de probabilidad debe de cumplir con las siguientes condiciones.

- 1)  $\mu_t(\Omega_t) = 1$ .
- 2)  $\mu_t(B) \geq 0 \forall B \in \sigma_t$ .

3) Sea  $B_1, B_2, \dots, B_m \in \sigma_t$  y sean ajenos dos a dos, esto es  $B_i \cap B_j = \emptyset$  para  $i \neq j$  entonces  $\mu_t(\cup_{i=1}^n B_i) = \sum_{i=1}^n \mu_t(B_i)$ .

Dependiendo del problema que se esté tratando es la función de densidad de probabilidad que se trabaja, en este caso como las transiciones normalmente representan mano de obra, procesamiento, transformación de alguna cosa en otra, operaciones, dispositivos o algo que está en función del tiempo se sugiere usar como medida la función de densidad exponencial de acuerdo con [4] de manera que queda (4.5).

$$\mu_t = \lambda e^{-\lambda y} dy \quad (4.5)$$

### Conjunto de arcos o relación de flujo continuo estocástico.

Sea  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  una colección donde están contenidos todos los arcos de una  $RP_{ma}$ , tanto los arcos que van de lugar a transición (PRE-arco) y los que van de transición a lugar (POS-arco). Cabe señalar que un recorrido completo va de  $lugares_x$  de entrada a un  $lugar_y$  de entrada, pasando por una transición que los une, por eso  $F$  es una relación de flujo y para el caso las  $RP_{ma}$  el flujo es continuo y estocástico entre los lugares de entrada y cualesquier lugar de salida de la red.

### Función W

$W$  es una función que nos relaciona una transición y un lugar o viceversa, y para  $RP_{ma}$  esta función está en el dominio de los reales y dependerá de las características estadísticas de nuestro sistema para proponer los pesos que tendrá cada arco. En las redes de  $RP_{ma}$  los arcos representan el valor mínimo aceptable con respecto a un valor estándar ya sea de calidad, cantidad, porcentaje, etc., que sea de interés.

Los espacios de probabilidad P y T se relacionan a través  $W$  y se puede definir perfectamente una medida del producto de estos dos espacios dando como resultado.

1) Sea  $P$  y  $T$  dos espacios con medida, entonces, para  $A \in \sigma_p$  y  $B \in \sigma_t$  implica que  $\mu_{(P \times T)} = \mu_p(A)\mu_t(B)$ .

### Espacio de probabilidad M

El espacio  $M$  al igual que los demás cuenta con tres elementos a saber  $(\Omega_m, \sigma_m, \mu_m)$ .

$$1) \Omega_m = \{\cup_{i=1}^n (a_i, b_i) : (a_i, b_i) \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \text{ y } a \leq b\}$$

Este conjunto universo está compuesto de intervalos, que son los intervalos donde se va a mover la variable aleatoria del marcaje de la  $RP_{ma}$  y que son a su vez elementos de la  $\sigma_t$ -álgebra de Borel.

2)  $\sigma_m$  es una colección de subconjuntos de  $\Omega_m$  tal que:  $\sigma_m$ .

$$2.1 \Omega_m \in \sigma_m.$$

$$2.2 \text{ Sea } C \in \sigma_m \text{ entonces } C^c \in \sigma_m.$$

$$2.3 \text{ Sea } C_1, C_2, \dots, C_n \in \sigma_m \text{ tal que } \cup_{i=1}^n C_i \in \sigma_m.$$

La construcción se basa en el hecho que de los elementos del conjunto universo son elementos de los borelianos (son los conjuntos de Borel), entonces se puede formar una  $\sigma$ -álgebra, de tal manera que su definición queda descrita en (4.6).

$$\mathbb{B}(\Omega_m) = \{\Omega_m \cap B : B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})\} \quad (4.6)$$

3)  $\mu_m : \sigma_m \rightarrow [0, 1]$  es una medida de probabilidad con:

$$3.1 \mu_m(\Omega_m) = 1.$$

$$3.2 \mu_t(C) \geq 0 \forall C \in \sigma_m.$$

$$3.3 \text{ Sea } C_1, C_2, \dots, C_m \in \sigma_m \text{ y sean ajenos dos a dos, esto es } C_i \cap C_j = \emptyset \text{ para } i \neq j \text{ entonces } \mu_m(\cup_{i=1}^m C_i) = \sum_{i=1}^m \mu_m(C_i).$$

La definición de esta función es acorde al proceso que se esta analizando y que coincide dimensionalmente con el de los lugares.

## 4.2. Reglas de disparo de una transición.

Para generar una salida o entrega de marcas a un lugar de la salida, la transición debe de cumplir con ciertas condiciones, condiciones que harán que el sistema evolucione en la presencia de cierta entrada, y de no ser así se realiza la retroalimentación, notificando de activación lo requerido para generar un disparo de una transición de interés cumpliendo con:

- 1) Una transición está habilitada si cada lugar de  $p$  a  $t$ , es marcado con al menos  $w(p, t) * t^q$  marcas. Donde  $w(p, t)$  es el peso del arco que va de  $p$  a  $t$  y  $q$  es el grado de sensibilidad de la transición  $t$  y se cumple (4.7).

$$\phi(M_{p_i}) \leq w(p_i, t_j) \quad (4.7)$$

- 2) Una transición habilitada puede o no dispararse, esto dependerá de la probabilidad que tengan los lugares de entrada de la transición habilitada.
- 3) El disparo de una transición habilitada remueve  $w(p, t) * t^q$  marcas de cada lugar de entrada de  $p$  a  $t$ , y deposita  $w(p, t) * t^q * \rho$  marcas, donde  $w(p, t)$  es el arco de  $t$  a  $p$ ,  $q$  es el grado de sensibilidad de la transición  $t$ , y  $\rho$  es el coeficiente de correlación entre los lugares de entrada de la transición  $t$  y algún lugar de salida de esta misma transición.

### 4.3. Evolución de marcaje en una red de Petri

Considérese el sistema de la figura 4.2.

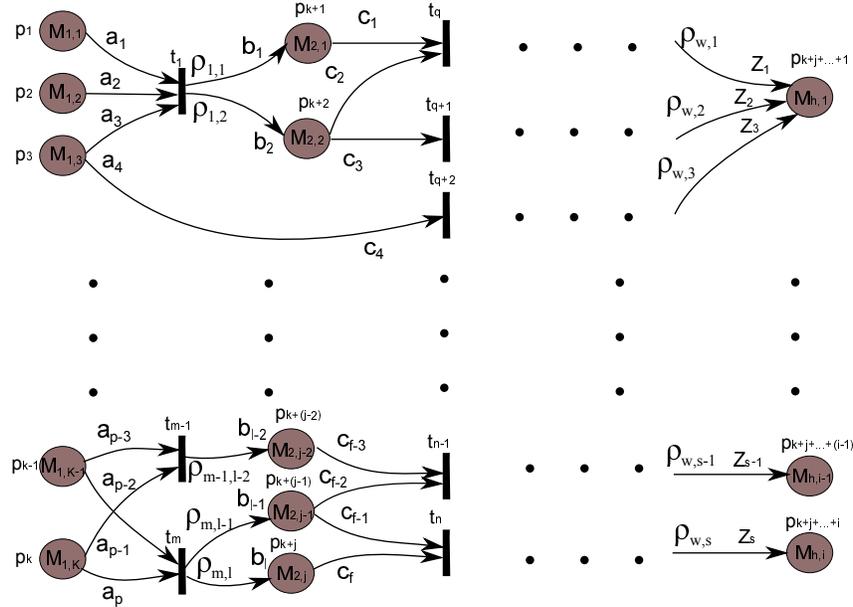


Figura 4.2: Modelo de una sistema por medio de una red de Petri.

Donde:

- 1) El marcado de la red de Petri es  $M_{1,1}, M_{1,2}, \dots, M_{h,j}$ .
- 2) La secuencia de disparos de entrada es  $t_1, t_2, \dots, t_i$ .
- 3)  $a_1, a_2, \dots, z_s - 1, z_s$  son los arcos que relacionan los lugares de entrada con los lugares de salida de una transición dada.
- 4) Los coeficientes de correlación lineal que caracterizan variaciones en las etapas realizadas en cada una de las transiciones son  $\rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \dots, \rho_{w,s-1}, \rho_{w,s}$ .

El problema a resolver, es estimar los parámetros de correlación lineal  $\rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \dots, \rho_{w,s-1}, \rho_{w,s}$  de (4.8), ya que la matriz donde están contenidos estos parámetros, muchas veces es una matriz singular.

Para no enfrentar este costoso problema de resolver esta ecuación lineal, que crece rápidamente al aumentar el número de elementos que conforman la red de Petri, entonces se propone una descripción alternativa a través de los siguientes resultados.

**Teorema 4.1** *Dado una red de Petri con sus estados observables  $T$  y sus estados iniciales  $M_0$ , tiene una descripción lineal a través de sus parámetros de acuerdo con (4.8).*

$$M_d = \begin{bmatrix} M_{1,1} \\ \vdots \\ M_{s,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1\rho_{1,1} & \cdots & z_1\rho_{1,w} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_s\rho_{s,1} & \cdots & z_s\rho_{s,w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_w \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Queda descrito por (4.9).

$$b_i = \rho_{i,j}\alpha + \xi_i \text{ siendo una solución por etapas con } i, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.9)$$

**Prueba:** *Considérese la resolución por etapas, de tal manera que se seccionaron las relaciones para cada uno de sus lugares de salida como puede verse en las figuras 4.3 y 4.4, que aunque tienen los mismos lugares de entrada, no así el coeficiente de correlación  $\rho$  ni el peso del arco que va hacia el lugar de salida. De forma tal que para resolver esta descripción se tomó el principio de divide y vencerás, contemplando que el problema como un todo se tornaba mas complicado y que ademas pueden existir soluciones no validas o redundantes para la red de Petri.*

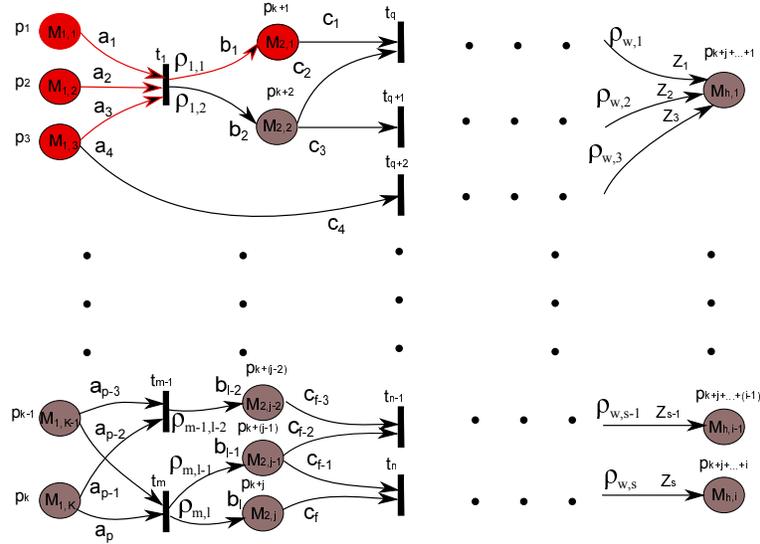


Figura 4.3: Relación de lugares de entrada respecto a cada lugar de salida.

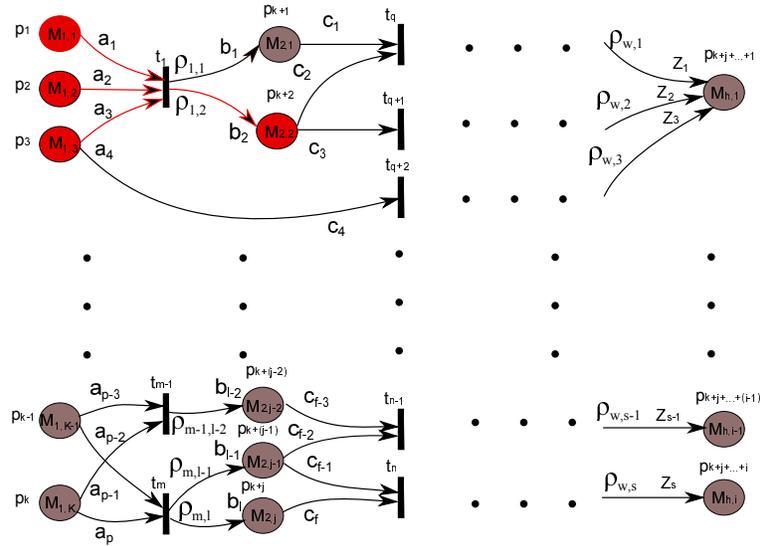


Figura 4.4: Relación de lugares de entrada con cada lugar de salida (cont.).

Tomando el caso de la figura 4.3, la transición  $t_1$  con el lugar de salida que tiene como parámetros  $\rho_{1,1}$  y  $b_1$  y lugares de entrada  $p_1$ ,  $p_2$ , y  $p_3$  con pesos en sus arcos  $a_1$ ,  $a_2$ , y  $a_3$  respectivamente, se obtiene la relación descrita en

(4.10).

$$b_1 = \rho_{1,1}(a_1 + a_2 + a_3) + \xi_1 \text{ con } \rho_{1,1} \text{ y } \xi_1 \text{ constantes} \quad (4.10)$$

Reescribiendo a (4.10) de manera que la suma de las variables  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  sea representada por una sola variable  $\alpha_{1,1}$  sin perdida de generalidad, obteniendo como resultado (4.11) y el sistema reducido se puede observar en la figura 4.5.

$$b_1 = \rho_{1,1}\alpha_{1,1} + \xi_1 \quad (4.11)$$

Donde:

$\xi_1$  constante de desplazamiento.

$\alpha_{1,1}$  es la variable de relación lineal.

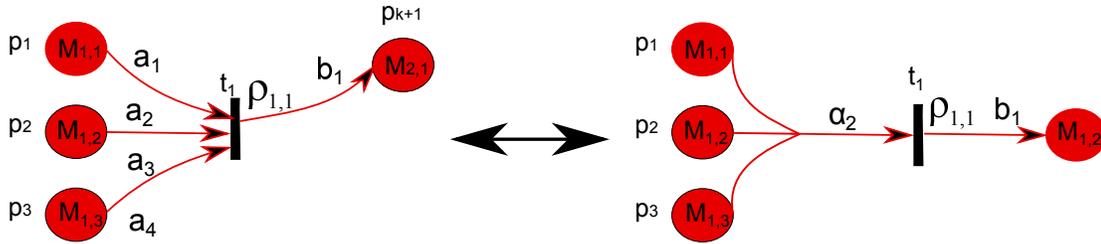


Figura 4.5: Relación de equivalencia.

De manera análoga se lleva a cabo cada una de las relaciones existentes en la red de Petri, quedando como resultado (4.12).

$$b_i = \rho_{i,j}\alpha + \xi_i \text{ con } \rho_{i,j} \text{ y } \xi_i \text{ constantes y } i, j \in \mathbb{N}. \quad (4.12)$$

Que es lo que se quería probar ■.

**Teorema 4.2** Sea la relación lineal entre los lugares de entrada y un lugar de salida de una transición dada por (4.13).

$$b_1 = \rho_{1,1}\alpha_{1,1} + \xi_1 \quad (4.13)$$

Donde  $\rho_{1,1}$ ,  $\xi_1$  y  $b$  son coeficientes de relación lineal, variable compuesta por lugares de entrada y constante de desplazamiento respectivamente.

Entonces los valores óptimos de  $\rho_{1,1}$  y  $\xi_1$  se obtienen de (4.14) y (4.15).

$$\rho_{1,1} = \frac{n \sum_{i=1}^n b_1^i \alpha_{1,1}^i - \sum_{i=1}^n b_1^i \sum_{i=1}^n \alpha_{1,1}^i}{n \sum_{i=1}^n b_1^{i^2} - (\sum_{i=1}^n b_1^i)^2} \quad (4.14)$$

$$\xi_1 = \frac{\sum_{i=1}^n b_1^{i^2} \sum_{i=1}^n \alpha_{1,1}^i - \sum_{i=1}^n b_1^i \sum_{i=1}^n b_1^i \alpha_{1,1}^i}{n \sum_{i=1}^n b_1^{i^2} - (\sum_{i=1}^n b_1^i)^2} \quad (4.15)$$

**Prueba:** Considérese que tenemos a disposición un conjunto de muestras  $(\alpha_{1,1}^1, b_1^1), (\alpha_{1,1}^2, b_1^2), \dots, (\alpha_{1,1}^n, b_1^n)$ . Con estos datos tratemos de escoger a  $\rho_{1,1}$  y a  $b$  tal que la diferencia de los valores de  $B_1$  que se obtienen de (4.13) y los valores de las muestras de  $b_1$  sean el mínimo de tal forma que.

$$F(\rho_{1,1}, \xi_1) = \sum_{i=1}^n (B_1^i - b_1^i)^2 \quad (4.16)$$

O lo que es lo mismo, sustituyendo (4.13) en (4.17) se tiene (4.17).

$$F(\rho_{1,1}, \xi_1) = \sum_{i=1}^n (\rho_{1,1} \alpha_{1,1}^i + \xi_1 - b_1^i)^2 \quad (4.17)$$

La estimación es óptima si se considera la descripción (4.18) por medio de su gradiente.

$$\nabla F = \frac{\partial(2 \sum_{i=1}^n \rho_{1,1} \alpha_{1,1}^i + \xi_1 - b_1^i = 0)}{\partial(\rho_{1,1}, \xi_1)} \quad (4.18)$$

Resulta entonces (4.19) y (4.20).

$$\frac{\partial F}{\partial \rho_{1,1}} = 2 \sum_{i=1}^n \rho_{1,1} \alpha_{1,1}^i + \xi_1 - b_1^i = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 2 \sum_{i=1}^n (\rho_{1,1} \alpha_{1,1}^i + \xi_1 - b_1^i) \alpha_{1,1}^i = 0 \quad (4.20)$$

Desarrollando (4.19) y (4.20) se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales con respecto a  $\rho_{1,1}$  y  $\xi_1$ . Que son (4.21) y (4.22).

$$\rho_{1,1} \sum_{i=1}^n \alpha_{1,1}^i + \xi_1 n = \sum_{i=1}^n b_1^i \quad (4.21)$$

$$\rho_{1,1} \sum_{i=1}^n \alpha_{1,1}^{i^2} + \xi_1 \alpha_{1,1}^i = \sum_{i=1}^n b_1^i \alpha_{1,1}^i \quad (4.22)$$

Resolviendo el sistema de las ecuaciones (4.21) y (4.22) se tienen (4.23) y (4.24).

$$\rho_{1,1} = \frac{n \sum_{i=1}^n b_1^i \alpha_{1,1}^i - \sum_{i=1}^n b_1^i \sum_{i=1}^n \alpha_{1,1}^i}{n \sum_{i=1}^n b_1^{i^2} - (\sum_{i=1}^n b_1^i)^2} \quad (4.23)$$

$$\xi_1 = \frac{\sum_{i=1}^n b_1^{i^2} \sum_{i=1}^n \alpha_{1,1}^i - \sum_{i=1}^n b_1^i \sum_{i=1}^n b_1^i \alpha_{1,1}^i}{n \sum_{i=1}^n b_1^{i^2} - (\sum_{i=1}^n b_1^i)^2} \quad (4.24)$$

Y que corresponden a (4.14) y (4.15) respectivamente ■.

**Comentario:** Para encontrar los parámetros  $\rho_{1,2}$  y  $\xi_2$  de otro lugar de salida de la transición dada, se procede de la misma forma el caso para encontrar los parámetros  $\rho_{1,1}$  y  $\xi_1$  teniendo como resultado (4.25) y (4.26).

$$\rho_{1,2} = \frac{n \sum_{i=1}^n b_2^i \alpha_{1,2}^i - \sum_{i=1}^n b_2^i \sum_{i=1}^n \alpha_{1,2}^i}{n \sum_{i=1}^n b_2^{i^2} - (\sum_{i=1}^n b_2^i)^2} \quad (4.25)$$

$$\xi_2 = \frac{\sum_{i=1}^n b_2^{i^2} \sum_{i=1}^n \alpha_{1,2}^i - \sum_{i=1}^n b_2^i \sum_{i=1}^n b_2^i \alpha_{1,2}^i}{n \sum_{i=1}^n b_2^{i^2} - (\sum_{i=1}^n b_2^i)^2} \quad (4.26)$$

# Pruebas y resultados

---

En este capítulo se realizarán algunos ejemplos sencillos con las  $RP_{ma}$  con retroalimentación de activación, con el propósito de resaltar las nuevas características que se le han añadido a este nuevo tipo de redes de Petri. Cabe mencionar que los datos con los que se trabajaran son propuestos para fines prácticos. También otro punto importante a aclarar que las marcas se consideran como variables aleatorias con función de distribución conocida, más precisamente con función de distribución normal en la mayoría de los ejemplos.

Se contemplan dos ejemplos, para el ejemplo uno se propone un procesos muy sencillo donde solo tres ingredientes son mezclados al instante en que una transición es disparada. En este ejemplo se puede destacar la información adicional en forma de probabilidad que nos permite la retroalimentación de activación. Para el ejemplo dos se puede observar mas a detalle la esencia de la res que se propone y las transformaciones que se pueden llevar a poder asignar valores de forma dinámica a los arcos de la  $RP_{ma}$ .

### Ejemplo 1: Dispensadora de café.

Se tiene que para una dispensadora de café, el cliente toma de un estante un vaso de unicel de la medida que el desee consumir. Las medidas disponibles de los vasos son chico, mediano y grande. Una vez que el cliente escoge el vaso basta con colocarlo en cierto contenedor el vaso escogido y la máquina empezará a llenarlo de manera automática. La máquina empieza a llenar tres ingredientes, que son azúcar, agua y una mezcla especial de café con cierta proporción previamente establecida para dar como resultado la bebida lista para ser consumida. El modelo en redes de Petri se puede ver en la figura 5.1.

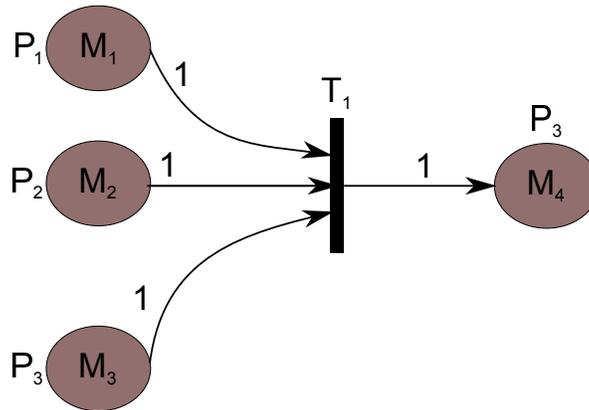


Figura 5.1: Modelo de dispensadora de café con redes de Petri.

La descripción del modelo de la figura 5.1, se puede dar de la siguiente manera. Se tienen cuatro lugares  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  y una transición  $T_1$ . Los tres primeros lugares son los ingredientes necesarios para obtener el café, la transición  $T_1$  representa el evento de poner el vaso en el lugar adecuado y por último el lugar  $P_4$  representa el café como tal.

Se observa que los arcos tienen como peso la unidad, esto se puede interpretar como sigue: Al dispararse la transición  $T_1$ , se toma una porción de azúcar, una porción de agua y una porción de mezcla para generar una porción de café.

La dosificación de los ingredientes se realiza temporizando una válvula para que deje pasar cada uno de los ingredientes, generando las variaciones en las

cantidades que se mezclan. Realizando mediciones en las cantidades que se entregan se observa que obedecen a una distribución normal y como consecuencia la cantidad de café también.

Se realizaron 300 muestras que se pueden observar en la figura 5.2.

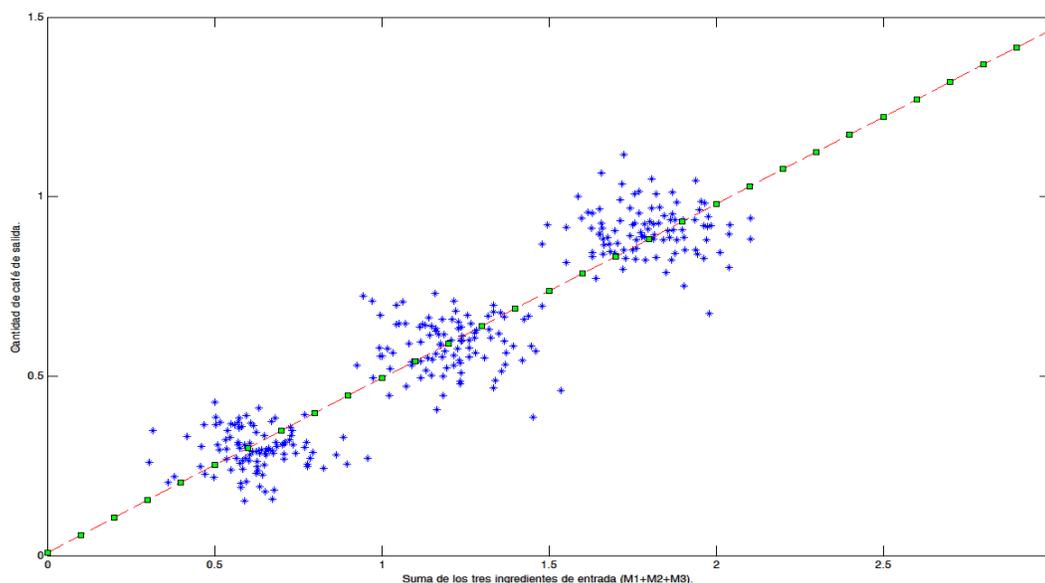


Figura 5.2: Muestro de la relación entre ingredientes y cantidad de café.

Del muestreo se tiene obtienen los siguientes datos:

Media para el vaso grande  $\mu_g = 1.8075$ .

Media para el vaso mediano es  $\mu_m = 1.2164$ .

Media para el vaso chico es  $\mu_c = 0.5750$ .

Varianza para el vaso grande es  $Var_g = 0.0207$ .

Varianza para el vaso mediano es  $Var_m = 0.0151$ .

Varianza para el vaso chico es  $Var_c = 0.0195$ .

Coefficientes de correlación lineal son  $\rho_{1,1} = 0.4616$  y  $\xi_1 = 0.0383$ , de tal manera que la relación lineal queda:  $b_1 = \alpha_1\rho_{1,1} + \xi_1 \iff b_1 = 0.4616\alpha_1 + 0.0383$  y con  $Var_g = 0.0182$  de modo que con estos datos es posible estimar los valores de café que se entrada a la salida, para cantidades de ingredientes dados.

Con la función de relación lineal dada, se puede asignar valores al arco del lugar de salida en relación de las cantidades que entren a los arcos entrada de la transición  $T_1$ , considerando el hecho que estos no son constantes. De manera que para cada valor de entrada dado se tendrá un valor en el peso del arco de salida.

La matriz de incidencia se generó a partir de (5.1) y (5.2).

$$a_{ij}^- = \begin{matrix} & T_1 \\ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.1)$$

$$a_{ij}^+ = \begin{matrix} & T_1 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.2)$$

Recordando que  $A_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^-$  resulta (5.3).

$$A_{ij} = \begin{matrix} & T_1 \\ \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ b_1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.3)$$

La representación matricial de la  $RP_{ma}$  queda descrita en (5.4).

$$M_d = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \\ b_1 \end{bmatrix} [ t_1 ] \quad (5.4)$$

En la figura 5.3 se observa una  $RP_{ma}$ , el arco indican la media de los ingredientes después de haber obtenido algunas mediciones previas para el caso del vaso de medida grande.

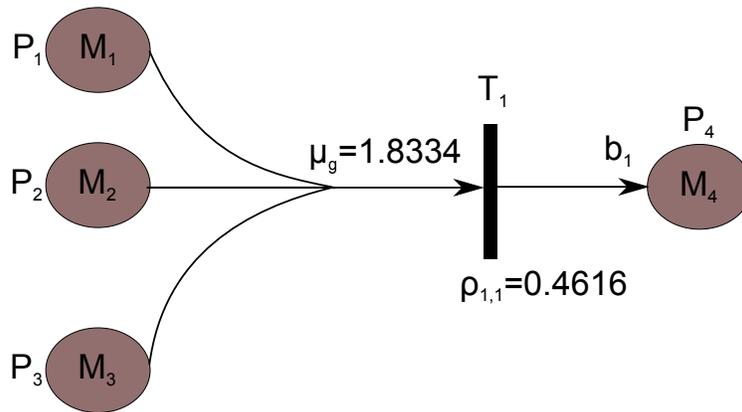


Figura 5.3: Modelo equivalente con arco de relación único.

La importancia de tener la media y variación es que se puede inferir en donde la mayoría de los valores del arco  $b_1$  se encuentra dando así la posibilidad de tomar decisiones.

La cantidad de café para el vaso grande es de 0.9 litros. Se sirve más de un litro, se considera como pérdida; pero por otro lado, si se sirve menos de 0.8 litros, se considera más servicio y de igual forma es una pérdida. ¿Cuál es la probabilidad de que el servicio sea el adecuado sin tener alguna de estas pérdidas?.

Los parámetros de entrada para el vaso grande son  $\mu_g = 1.8075$ ,  $Var_g = 0.0207$  y que la función de relación lineal es (5.5).

$$b_1 = 0.4616\alpha_1 + 0.0383 \quad (5.5)$$

A partir de (5.5) se tiene (5.6).

$$\mu_{b_1} = 0.4616\mu_g + 0.0383 = 0.4616 * 1.8075 + 0.0383 = 0.872642 \quad (5.6)$$

Así como (5.8).

$$\tau_{b_1}^2 = 0.4616^2\tau_g^2 = 0.0044\tau_{b_1} = 0.06641 \quad (5.7)$$

$$\tau_{b_1} = 0.06641 \quad (5.8)$$

Dado estos datos se estandarizan los valores a  $N(1, 0)$  son descritos de acuerdo con (5.9).

$$z = \frac{x - \mu}{\tau} \quad (5.9)$$

Para este caso se reduce a (5.10) y (5.11).

$$z_{0.8} = \frac{0.8 - 0.872642}{0.06641} = -1.0938 \quad (5.10)$$

$$z_{0.8} = \frac{1 - 0.872642}{0.06641} = 1.9177 \quad (5.11)$$

Con los valores recién calculados, se pasa a buscar en las tablas 6.1 y 6.2 los valores de  $x$  y el valor que le corresponda será su respectiva probabilidad que de acuerdo a (5.9) y (5.10) se tienen.

$$\varphi(-1.0938) = 0.1368.$$

$$\varphi(1.9177) = 0.9719.$$

respectivamente.

La probabilidad de que el servicio sea el adecuado esta dado por:  $0.9719 - 0.1368 = 0.8531$ .

En lo que respecta a este ejemplo se puede destacar que en ningún momento los pesos de los arcos permanecen estáticos como se tenía antes en las redes de Petri clásicas. Es decir que los arcos se modifican de manera dinámica en dependencia de los parámetros de entrada, permitiendo así tomar decisiones en línea.

### **Ejemplo 2: Bebida energética.**

Para realizar la preparación de cierta bebida energética se tienen que mezclar tres sustancias, sustancia  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Cada una de estas sustancias se constituye de una porción de un líquido donde se diluye un ingrediente especial. Una vez que se tiene la mezcla de un líquido y un ingrediente especial, se pasa al área de preparado que no es otra cosa más que juntar las tres sustancias que se obtienen de la etapa previa para crear la bebida energética. Después de obtener la bebida se pasa a la etapa de embotellado donde se llenan las botellas con cierta cantidad de dicha bebida. Idealmente la sustancia  $A$  aporta 200ml, la sustancia  $B$  250ml y la sustancia  $C$  300ml. En la figura 5.4 se observar el modelo con  $RP_{ma}$  del proceso para formar la bebida energética.

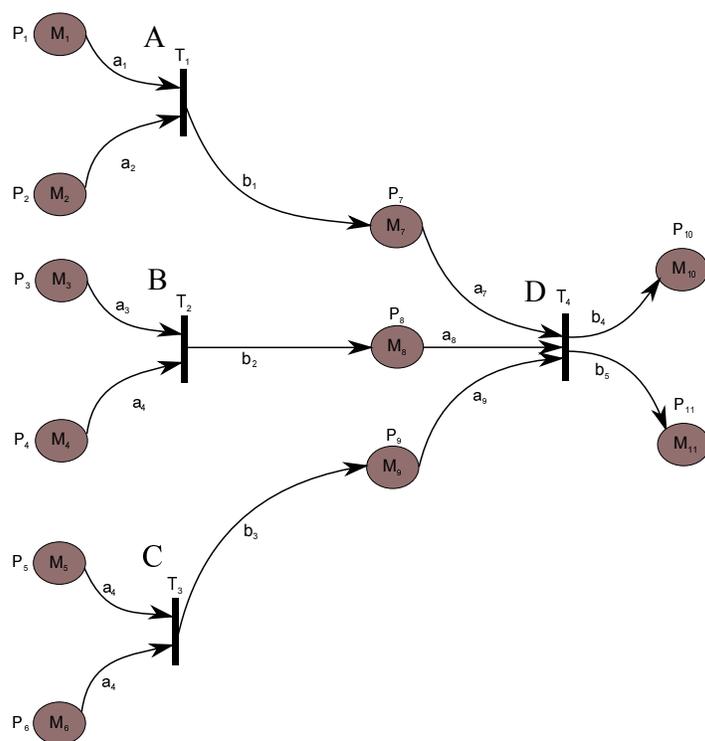


Figura 5.4: Modelo con  $RP_{ma}$  para bebida energética .

El modelo consta de once lugares  $P_i, i = \{1, \dots, 11\}$  y cuatro transiciones  $T_j, j = \{1, \dots, 4\}$ . En el lugar  $P_1$  se tiene la cantidad disponible del ingrediente especial uno y en  $P_2$  se tiene la cantidad de liquido uno disponible, juntos estos dos lugares forman la sustancia A una vez que la transición  $T_1$  es disparada. Para la pareja de lugares  $P_3$  y  $P_4$  forman la misma relación que  $P_1$  y  $P_2$ , en este caso  $P_3$  suministra el ingrediente dos y  $P_4$  suministra el liquido dos al momento que la transición  $T_2$  es disparada creando así la sustancia B. De la misma manera que las anteriores la pareja de lugares  $P_5$  y  $P_6$  aportan los elementos necesarios para crear la sustancia C cuando la transición  $T_3$  se dispara. La sustancia es depositada en el lugar  $P_7$ , la sustancia B es depositada en  $P_8$  y la sustancia C es depositada en  $P_9$ . Cuando se dispara la transición  $T_4$  las tres sustancias mezcladas y se tiene como resultado dos cantidades de bebida energética mostradas en los lugares  $P_{10}$  y  $P_{11}$ .

Del moldeo de la figura 5.4 se obtienen las matrices (5.12) y (5.13).

$$a_{ij}^- = \begin{array}{cccc|c} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & \\ \left[ \begin{array}{cccc} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 \\ 0 & 0 & 0 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & a_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \end{array} \end{array} \quad (5.12)$$

$$a_{ij}^+ = \begin{array}{cccc|c} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & \\ \left[ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 \end{array} \right] & \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \end{array} \end{array} \quad (5.13)$$

A partir de (5.14) es como se construye la matriz de incidencia de la  $RP_{ma}$  del modelo de la figura 5.4.

$$A_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^- \quad (5.14)$$

Quedando como resultado (5.15).

$$A_{ij} = \begin{matrix} & T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & \\ \left[ \begin{array}{cccc} -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & -a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_5 & 0 \\ 0 & 0 & -a_6 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & -a_7 \\ 0 & b_2 & 0 & -a_8 \\ 0 & 0 & b_3 & -a_9 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_5 \end{array} \right] & \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \end{array} \end{matrix} \quad (5.15)$$

Inicialmente los arcos tiene pesos ideales como se muestre en la figura 5.5 contemplando que cada una de las etapas se llevaba acabo. Realizando algunas mediciones a las cantidades que entran y salen de las transiciones se observa que existen algunas variaciones dando como resultado valores que oscilan dentro de algún valor medio.

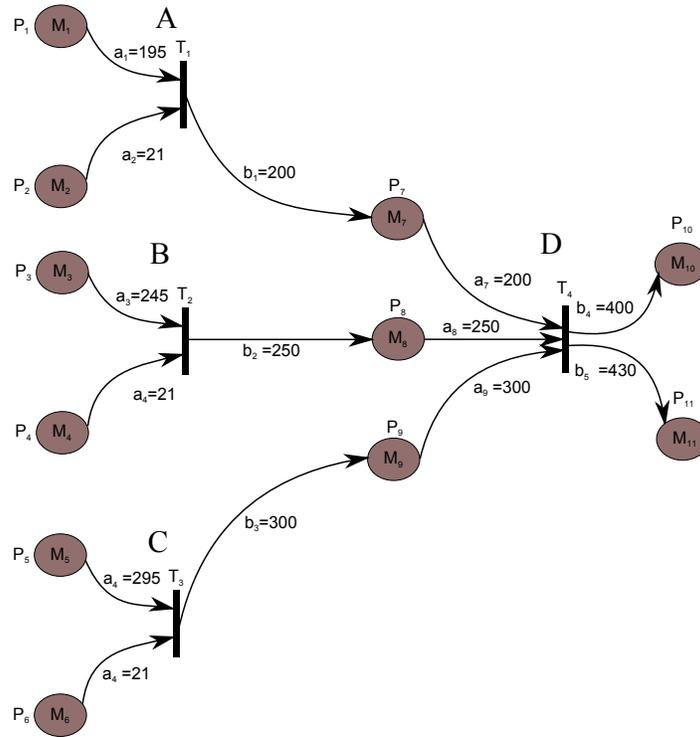


Figura 5.5: Modelo con  $RP_{ma}$  para bebida energética con pesos iniciales.

Del muestreo se tiene obtienen los siguientes datos de entrada y de salida de la transición  $T_1$ :

- Media de los valores de entrada de  $T_1$ :  $\mu_{IN_{a1}} = 304.4087$ .
- Media de los valores de salida de  $T_1$ :  $\mu_{IN_{a2}} = 40.2774$ .
- Media de los valores de entrada con relación  $(a_1+a_2)$ :  $\mu_{IN_A} = 344.6861$ .
- Media de los valores de salida de  $T_1$ :  $\mu_{OUT_{a7}} = 300.7275$ .

Del muestreo se tiene obtienen los siguientes datos de entrada y de salida de la transición  $T_2$  :

- Media de los valores de entrada de  $T_2$ :  $\mu_{IN_{a3}} = 251.1910$ .

- Media de los valores de salida de  $T_2$ :  $\mu_{IN_{a4}} = 50.1494$ .
- Media de los valores de entrada con relación  $(a_3+a_4)$ :  $\mu_{IN_B} = 301.3404$ .
- Media de los valores de salida de  $T_2$ :  $\mu_{OUT_{a8}} = 247.3464$ .

Del muestreo se tiene obtienen los siguientes datos de entrada y de salida de la transición  $T_3$ :

- Media de los valores de entrada de  $T_3$ :  $\mu_{IN_{a5}} = 196.9342$ .
- Media de los valores de salida de  $T_3$ :  $\mu_{IN_{a6}} = 69.1370$ .
- Media de los valores de entrada con relación  $(a_5+a_6)$ :  $\mu_{IN_C} = 266.0712$ .
- Media de los valores de salida de  $T_3$ :  $\mu_{OUT_{b3}} = 203.9672$ .

Del muestreo se tiene obtienen los siguientes datos de entrada y de salida de la transición  $T_4$ :

- Media de los valores de entrada de  $T_4$ :  $\mu_{IN_{a7}} = 196.4340$ .
- Media de los valores de salida de  $T_4$ :  $\mu_{IN_{a8}} = 254.0319$ .
- Media de los valores de salida de  $T_4$ :  $\mu_{IN_{a9}} = 306.4007$ .
- Media de los valores de entrada con relación  $(a_7 + a_8 + P_9)$ :  $\mu_{IN_D} = 756.8666$ .
- Media de los valores de salida de  $T_4$ :  $\mu_{OUT_{a10}} = 404.0107$ .
- Media de los valores de salida de  $T_4$ :  $\mu_{OUT_{a11}} = 444.0682$ .

Después de haber obtenido los valores de las mediciones se procede a tratar por etapas a la  $RP_{ma}$  aplicando el teorema 4.1. Se tiene la siguiente configuración de la  $RP_{ma}$  que se puede observar en la figura 5.6.

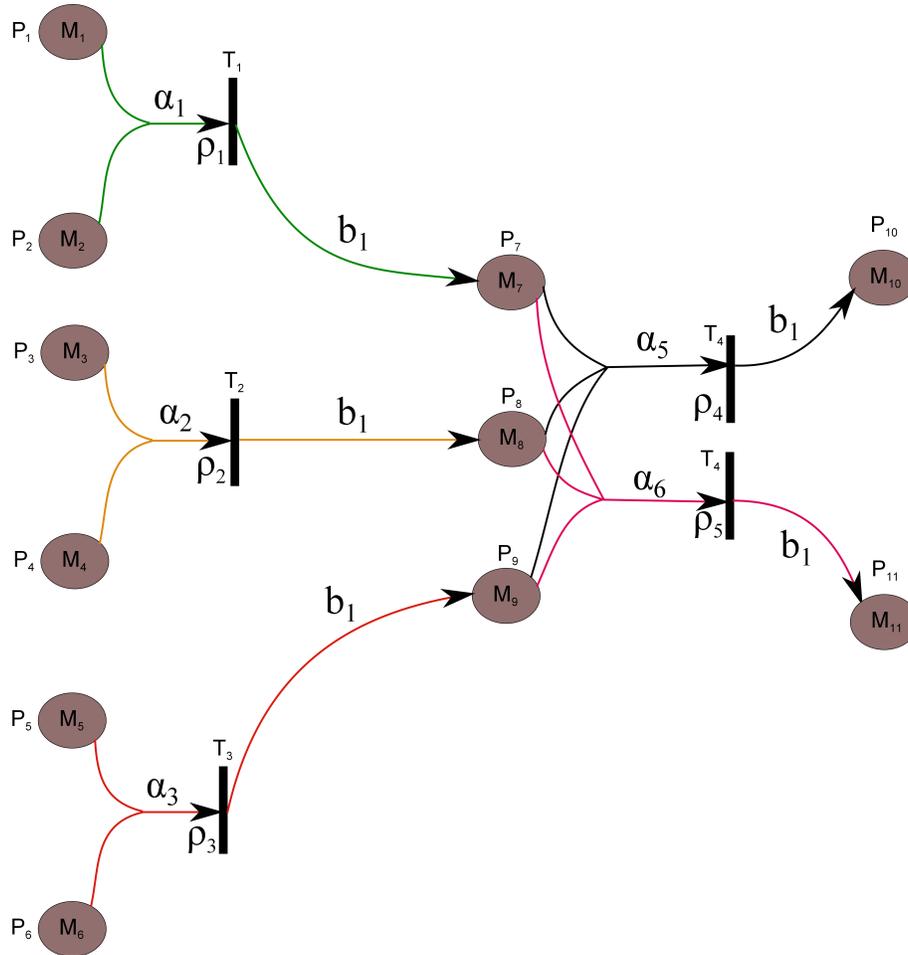


Figura 5.6: Relaciones entre entradas y cada salida.

Ahora lo que se procede hacer, es encontrar los valores de correlación lineal que nos relacionan los lugares de entrada con cada uno de los lugares de salida de cada una de las transiciones. Considerando (4.9), se obtiene la primera relación, en la cual están involucrados los arcos de los lugares \$P\_1, P\_2\$ y \$P\_7\$ teniendo como resultado (5.16).

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \rho_1(a_1 + a_2) + \xi_1 \text{ con } \rho_1 \text{ y } \xi_1 \text{ constantes} \\
 b_1 &= \rho_1\alpha_1 + \xi_1 \\
 b_1 &= -0.0073\alpha_1 + 302.8685
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

Estos valores fueron encontrados directamente de las muestras que tomaron y que se pueden observar en en la figura 5.7.

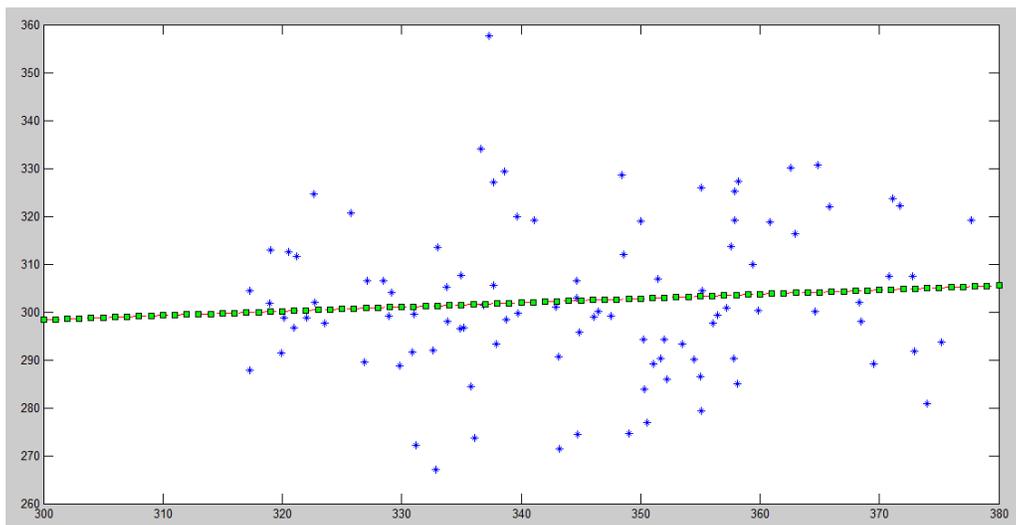


Figura 5.7: Relación  $P_1 + P_2$  vs  $P_7$ .

Para el caso donde los lugares  $P_3$ ,  $P_4$  y  $P_8$  son los involucrados, se tiene (5.17).

$$\begin{aligned}
 b_2 &= \rho_2(a_3 + a_4) + \xi_2 \text{ con } \rho_2 \text{ y } \xi_2 \text{ constantes} \\
 b_2 &= \rho_2\alpha_2 + \xi_2 \\
 b_2 &= 0.0475\alpha_2 + 232.1083
 \end{aligned}
 \tag{5.17}$$

Estos valores fueron encontrados directamente de las muestras que se tomaron y que se pueden observar en en la figura 5.8.

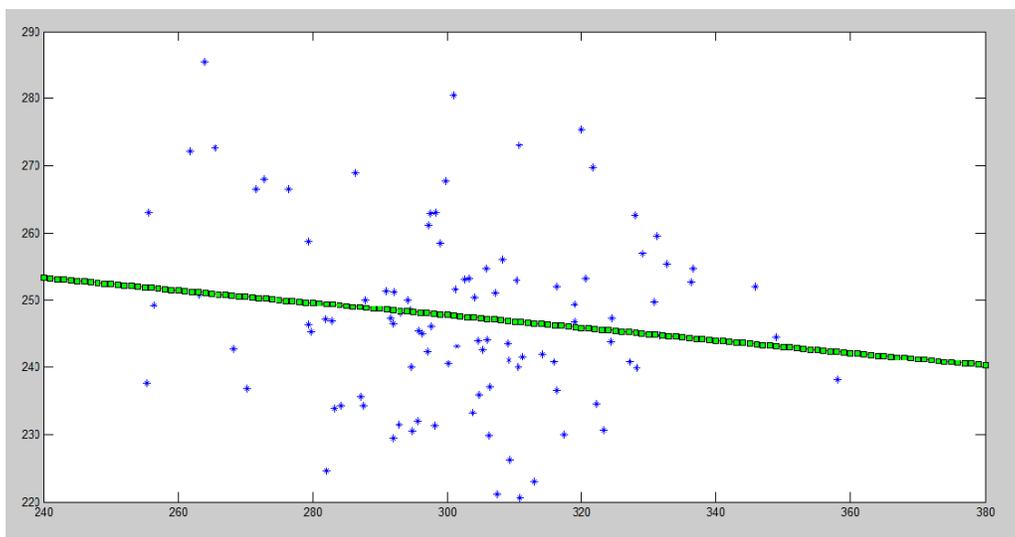


Figura 5.8: Relación  $P_3 + P_4$  vs  $P_8$ .

Para el caso donde los lugares  $P_5$ ,  $P_6$  y  $P_9$  son los involucrados, se tiene (5.18).

$$\begin{aligned}
 b_3 &= \rho_3(a_5 + a_6) + \xi_3 \text{ con } \rho_3 \text{ y } \xi_3 \text{ constantes} \\
 b_3 &= \rho_3\alpha_3 + \xi_3 \\
 b_3 &= -0.0274\alpha_3 + 212.4900
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Estos valores fueron encontrados directamente de las muestras que se tomaron y que se pueden observar en en la figura 5.9.

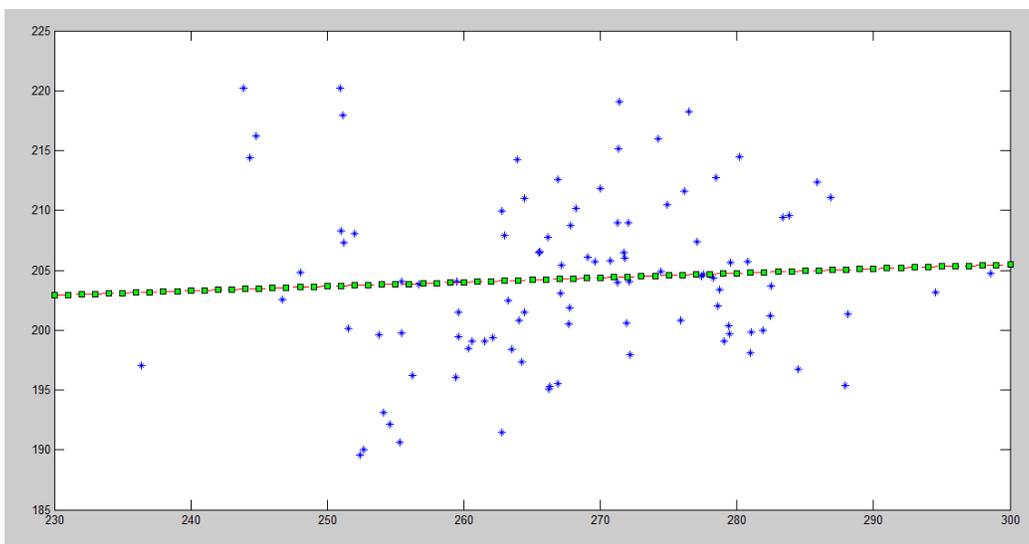


Figura 5.9: Relación  $P_5 + P_6$  vs  $P_9$ .

Para el caso donde los lugares  $P_7$ ,  $P_8$ ,  $P_9$  y  $P_{10}$  son los involucrados, se tiene (5.19).

$$\begin{aligned}
 b_4 &= \rho_4(a_7 + a_8 + a_9) + \xi_4 \text{ con } \rho_4 \text{ y } \xi_4 \text{ constantes} \\
 b_4 &= \rho_4\alpha_4 + \xi_4 \\
 b_4 &= 0.0248\alpha_4 + 381.7990
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$

Estos valores fueron encontrados directamente de las muestras que se tomaron y que se pueden observar en en la figura 5.10.

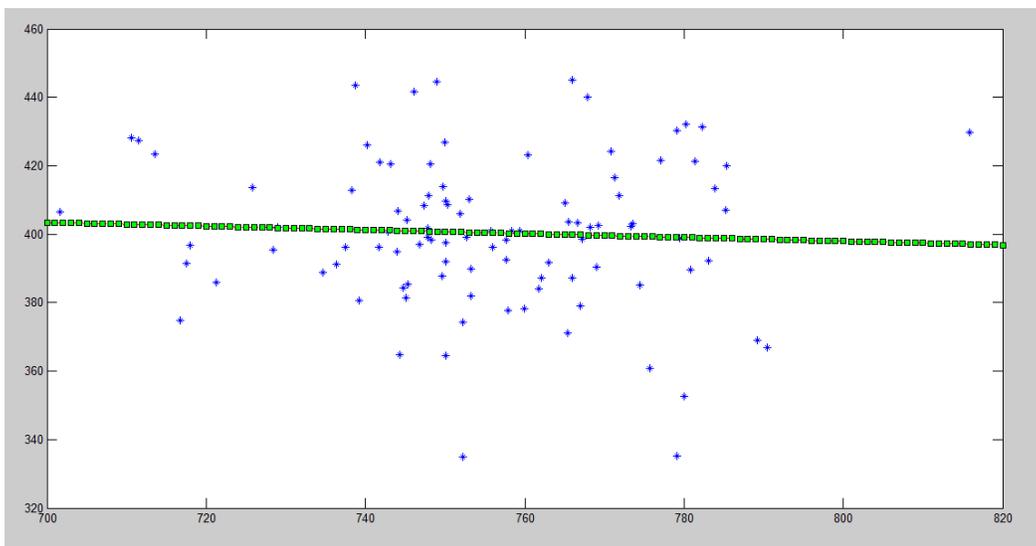


Figura 5.10: Relación  $P_7 + P_8 + P_9$  vs  $P_{10}$ .

Para el caso donde los lugares  $P_7$ ,  $P_8$ ,  $P_9$  y  $P_{11}$  son los involucrados, se tiene (5.20).

$$\begin{aligned}
 b_5 &= \rho_5(a_7 + a_8 + a_9) + \xi_5 \text{ con } \rho_5 \text{ y } \xi_5 \text{ constantes} \\
 b_5 &= \rho_5\alpha_5 + \xi_5 \\
 b_5 &= 0.0079\alpha_5 + 439.0496
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

Estos valores fueron encontrados directamente de las muestras que se tomaron y que se pueden observar en en la figura 5.11.

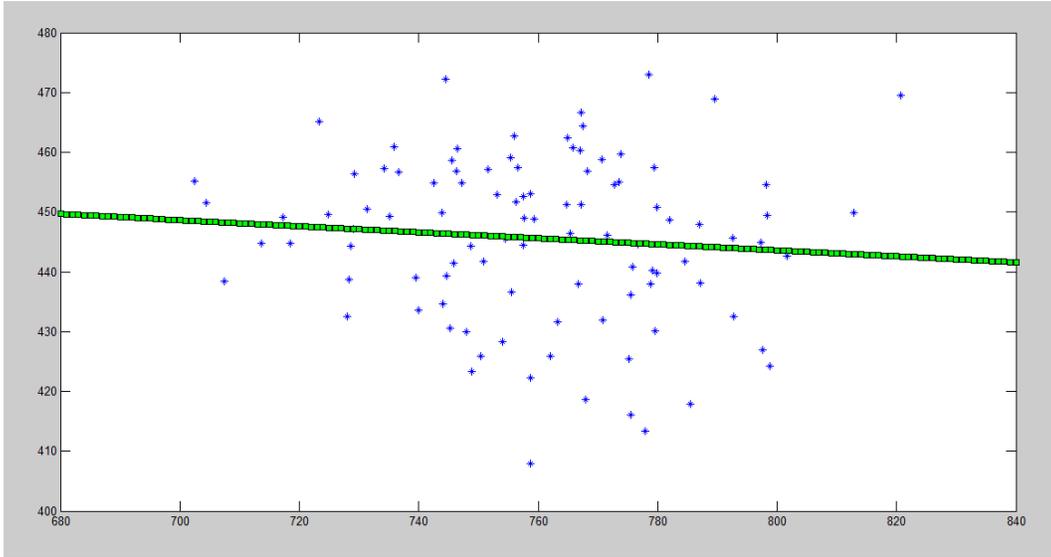


Figura 5.11: Relación  $P_7 + P_8 + P_9$  vs  $P_{11}$ .

Con estas relaciones se tiene la facultada de realizar algunas pruebas para algunos marcajes dados. Por el ejemplo, para un marcaje inicial  $M_0 = (304,47,190,55,200,73,0,0,0,0,0)$  y un vector de disparo  $U_k = [1,1,1,0]^T$ . La matriz de transición queda descrita en (5.21).

$$A = \begin{bmatrix} -403 & 0 & 0 & 0 \\ -47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -245.75 & 0 & 0 \\ 0 & -55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -73 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Esta matriz se generó a partir de usar (5.17), (5.18) y (5.19) encontrando de manera dinámica los pesos de  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$ , considerando un vector de disparo

dato, de manera que la dinámica del mercado queda descrita por (5.22).

$$M'_d = \begin{bmatrix} 304 \\ 47 \\ 245.7 \\ 55 \\ 200 \\ 73 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -403 & 0 & 0 & 0 \\ -47 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -245.7 & 0 & 0 \\ 0 & -55 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & -73 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 300.3 \\ 0 & 0 & 0 & 246.3 \\ 0 & 0 & 0 & 205.0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

$$M'_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 300.3 \\ 243.7 \\ 205.0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Ahora considerando este nuevo marcaje como marcaje inicial de manera que  $M_0 = (0,0,0,0,0,0,300.30,243.74,205.09,0)$  y como vector de entrada  $U_k = [0,0,0,1]^T$ , da como resultado el nuevo marcaje, en (5.24).

$$M_d'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 400.59 \\ 445.37 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Se hace notar que el peso de los arcos de salida se vuelven dinámicos a cada entrada que se tiene, esto permite realizar inferencias con respecto a los valores que se tendrán para las entradas dadas, otorgando la posibilidad de tomar alguna decisión antes que se lleve acabo el disparo de algún transición, evitando salidas no deseadas. Tener entradas de marcas cambiantes permite realizar la retroalimentación de activación permitiendo así realizar un mejor desempeño en la evolución del sistema. La relación de flujo del marcaje al paso de una transición se considera lineal. En base a esto es como se realiza las simulaciones.

Como resultados importantes se puede resaltar la capacidad de las redes de Petri en regímenes de operación diferentes a los ideales, permitiendo que el modelo describa diferentes escenarios más allá de los regímenes de operación contemplados, otorgando la posibilidad de realizar una retroalimentación de activación en tiempo de ejecución gracias a la información que brindan las redes de Petri con marcaje aleatorio.

## Conclusiones y trabajos futuros

---

En esta sección se comentan las conclusiones que se obtuvieron del presente trabajo de tesis, con respecto a los objetivos que se propusieron.

Por otro lado se mencionan los trabajos futuros, en donde se contempla realizar la asignación de arcos por medio de diferentes funciones, así como también la implementación en procesos reales permitiendo verificar los resultados que se obtuvieron, y así la solución de problema planteado.

## 6.1. Conclusiones

En el capítulo cuatro se presentó una red de Petri modificada: Una red de Petri con marcaje aleatorio la cual tiene la habilidad de trabajar con variables aleatorias tanto en el marcaje como en el peso de los arcos. De hecho el modelo aventaja a los demás modelos citados en la literatura, ya que puede hacer frente a variaciones en un sistema, brindando información de retroalimentación cualitativa en forma de probabilidad que auxilia a realizar acciones de control. Una vez que se tiene alguna información se pueden obtener ciertos parámetros, la red se convierte en un herramienta de consulta al describir el comportamiento para ciertos valores con incertidumbre dada.

Su debilidad radica en que se requiere tener información del sistema para empezar alguna inferencia de ciertos parámetros o valores que pueden tomar la red. Otro punto a considerar es que se toma como cierto la disposición de los estados internos de la red de Petri, lo cual no siempre es posible para todos los modelos.

En la presente tesis se redefinieron los elementos que conforman una red de Petri. El propósito de esta redefinición se hizo con la intención de trabajar en el campo de los números reales ( $\mathbb{R}$ ) para evidenciar numéricamente las variaciones que se presentan de forma normal en los sistemas. En este sentido se cumplió con el primer objetivo que era realizar ciertas modificaciones sobre las redes de Petri que permitieran caracterizar cualidades referentes a la incertidumbre y perturbaciones, de igual forma el segundo objetivo queda inmerso debido a que ya se contemplan variables aleatorias dentro del marcaje.

Una vez ya establecido que el marcaje de las redes de Petri se movía en los números reales, se definió este marcaje como aleatorio para considerar marcajes que ya no eran estáticos al pasar el tiempo.

Conforme se avanzó en el desarrollo se observó que no bastaba con tener marcajes aleatorios, era necesario tener pesos en los arcos aleatorios debido a que estos son la relación de flujo y los que se encargan de retirar o entregar recursos una vez que se dispara una transición.

En el Capítulo 5 se realizó un modelo con redes de Petri tradicionales y a partir de ese modelo se fueron agregando elementos de manera que al final

se tuviera un modelo con marcaje y arcos aleatorios, que es precisamente lo que se contemplaba en el tercer objetivo. Con base en este capítulo se puede concluir que las redes de Petri con marcaje aleatorio con retroalimentación de activación funcionaron adecuadamente para el caso donde los lugares de entrada estaban relacionados de forma lineal a los lugares de salida. Aunque el procesamiento puede resultar pesado para una cantidad considerable de lugares, se puede aliviar haciendo una exclusión de lugares que resulten ser de poco interés.

Como conclusión general se puede decir que dado un sistema descrito por medio de redes de Petri con estados internos observables y marcaje aleatorio es posible tener una descripción cuantitativa y cualitativa del sistema, permitiendo tomar acciones de control, toma de decisiones, conocimiento del desempeño de un sistema e incluso promover la mejora continua teniendo como primicia las magnitudes estadísticas.

## 6.2. Trabajos futuros

Como seguimiento de este trabajo de investigación será realizar pruebas con datos de un sistema real con múltiples entradas y múltiples salidas.

Como tarea importante será considerar los procesos donde las entradas sean variables aleatorias continuas.

Otro trabajo importante es contemplar no sólo una relación lineal entre los valores de los arcos y lugares de entrada y salida, sino más bien poder considerar cualquier función como relación entre los lugares para ampliar el campo de aplicación de este tipo de redes de Petri.

# Anexos

---

En esta sección se encuentran las tablas que se usaron a lo largo del trabajo de tesis, así como también los datos para realizar las pruebas, para verificar los resultados que se obtuvieron con esta propuesta.

Los datos se generaron a partir del software de MATLAB, con valores que obedecían a una función de distribución normal para el caso del marcaje en el capítulo cinco de pruebas y resultados.

En las tablas 6.1 y 6.2 se presentan los valores de función distribución acumulativa para la función de distribución normal estándar, que tiene como parámetros  $\mu = 0$  y  $\tau = 1$ .

Tabla 6.1: Valores de la Función de Distribución Acumulativa de  $N(0,1)$ .

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0061
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0352	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0722	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Tabla 6.2: Valores de la Función de Distribución Acumulativa (cont. 6.1).

<b>0.0</b>	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5339
<b>0.1</b>	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
<b>0.2</b>	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
<b>0.3</b>	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
<b>0.4</b>	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
<b>0.5</b>	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
<b>0.6</b>	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
<b>0.7</b>	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
<b>0.8</b>	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
<b>0.9</b>	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
<b>1.0</b>	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
<b>1.1</b>	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
<b>1.2</b>	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
<b>1.3</b>	0.9032	0.9019	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
<b>1.4</b>	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
<b>1.5</b>	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
<b>1.6</b>	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
<b>1.7</b>	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9610	0.9625	0.9633
<b>1.8</b>	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
<b>1.9</b>	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
<b>2.0</b>	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
<b>2.1</b>	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
<b>2.2</b>	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
<b>2.3</b>	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
<b>2.4</b>	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
<b>2.5</b>	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
<b>2.6</b>	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
<b>2.7</b>	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
<b>2.8</b>	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
<b>2.9</b>	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
<b>3.0</b>	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
<b>3.1</b>	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
<b>3.2</b>	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
<b>3.3</b>	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
<b>3.4</b>	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Valores obtenidos de la suma de los tres ingredientes de entrada para el caso del tamaño de vaso grande tabla 6.3.

Tabla 6.3: Valores de entrada para el vaso de tamaño grande.

1.90574368	1.895778295	1.620824847	1.899604308
1.85738124	1.669016296	1.789200071	1.795659937
2.254590122	2.093327936	1.528048543	2.236102082
1.866725562	1.716414375	1.863044006	1.693527261
1.82549192	1.873501964	2.065858135	1.895463085
1.904777723	1.815362727	2.025001733	1.926497727
1.724465487	1.872838275	1.911269923	1.776147818
1.839781071	1.667744217	1.916067199	1.5462692
1.549515366	1.672397489	1.441256118	1.939030116
1.787506191	1.530163224	1.933014216	1.689423057
1.709353487	1.833041991	1.796551869	1.822309248
1.685208678	1.642519792	1.731745587	1.970904655
1.855269631	1.96405487	1.667278628	1.805640824
1.679533943	1.676779099	1.809469493	1.94969116
1.83839452	1.723080535	1.933401266	1.928931255
1.741469068	1.647053145	1.775901886	1.997688826
2.067508675	1.695934769	1.620426726	1.593072452
1.678916279	2.143031232	1.70532412	1.877986133
1.799467552	1.863657249	1.747909433	1.588354384
1.535962895	1.931172101	1.762193295	1.806150874
1.976943394	1.894460628	1.81669223	2.05982673
1.799961165	1.935318391	1.800258885	1.770990225
1.938425893	1.54541032	1.661699872	1.657474629
1.946424394	2.1563607	1.726985344	1.846739304
1.661509709	1.643632137	1.578319438	1.447597246

Valores obtenidos de la suma de los tres ingredientes de entrada para el caso del tamaño de vaso mediano tabla 6.4.

Tabla 6.4: Valores de entrada para el vaso de tamaño mediano.

1.213112404	1.179217353	1.204453413	1.259709349
1.288203452	1.15935321	1.300507283	1.40949778
1.252741149	1.139073671	1.25949074	1.107916746
1.126288542	1.245186802	0.950529581	1.214529788
1.075281035	1.193021893	1.394771541	1.343501747
0.971086764	0.96555532	1.2847792	1.027100602
1.261886426	1.251752606	1.33044251	1.18661642
0.989758644	1.319421862	1.167408167	1.060060861
1.148293029	0.969855129	1.139415235	0.986445877
1.313548269	1.442987716	0.942815077	1.226869617
1.140658276	1.169255721	1.256261675	1.273145143
1.217046305	1.481393869	1.128697195	1.233267803
1.180609773	1.211432307	1.263891916	1.129887445
1.148719515	0.997537386	1.492809395	1.050166406
1.261081203	1.233544411	1.188784784	1.207584271
1.092307582	1.22091194	1.476142142	1.181952351
1.198836418	1.256254491	1.124438136	1.149082055
1.309552822	1.081176892	1.097866885	1.361548905
1.141010618	1.324874885	1.270899851	1.020922292
0.966048018	1.242860342	1.022336545	1.317705927
1.510408164	1.253119758	1.170332522	1.147646035
1.065701192	1.342426933	1.357096843	1.278578089
1.023409326	1.25177983	1.06232363	1.125268133
1.223226417	1.096572974	1.192512387	1.219863388
0.994757376	1.24404868	1.27211311	1.398966783

Valores obtenidos de la suma de los tres ingredientes de entrada para el caso del tamaño de vaso chico tabla 6.5.

Tabla 6.5: Valores de entrada para el vaso de tamaño chico.

0.765688984	0.64789404	0.626571492	0.548607792
0.814033119	0.599437032	0.650931637	0.634191928
0.514432091	0.672665797	0.727262736	0.496059949
0.481539268	0.670231274	0.344461176	0.692529226
0.702078308	0.550233751	0.749360201	0.776485632
0.688753213	0.589745554	0.689892371	0.482060637
0.434475131	0.493079567	0.635768262	0.598926614
0.649370361	0.495593315	0.673961931	0.610443111
0.456522262	0.565866551	0.532708316	0.481376244
0.463043249	0.461950013	0.274184871	0.403348347
0.570961018	0.453953143	0.380709128	0.587279425
0.293936452	0.383061693	0.767506668	0.593407651
0.569400759	0.526732376	0.381498297	0.617238619
0.798661197	0.803271092	0.500422134	0.229456766
0.558252768	0.691618802	0.5932006	0.404398506
0.759339677	0.372543116	0.458270861	0.397870293
0.519989468	0.579945553	0.573886653	0.482920002
0.672483213	0.616379854	0.597347491	0.538612422
0.797201772	0.721843733	0.856931784	0.551473912
0.614652929	0.45627347	0.695409801	0.661229623
0.573520904	0.435402584	0.541363515	0.530844677
0.635355345	0.531540399	0.575479388	0.610738314
0.374802428	0.656479254	0.524260212	0.919311013
0.517529458	0.627409279	0.435285426	0.412335339
0.582140233	0.541158044	0.779116778	0.535246294

Cantidad de café obtenida para el caso del vaso grande tabla 6.6

Tabla 6.6: Valores de salida para el vaso de tamaño grande.

0.930614385135840	0.864615907483668	0.907163476494906	0.983924243859381
0.908438570406404	0.827259135832499	0.839869000031022	0.888082285414696
0.886553305577897	0.839257802482100	0.912674686686710	0.988854667990986
0.882378948381102	0.885648167977942	0.745549861840026	0.845663199757851
0.802253462701508	0.872903292470981	0.936873075924489	1.00686659505583
1.02617531345727	0.891799858483028	0.877536291977298	0.957353734499672
0.934387645304220	0.953687018542684	0.954601003853634	0.796147597747472
0.937909815019131	0.893577981424662	0.846663676461385	0.851340065376176
0.989902047489218	0.843191986637431	0.813229677638678	0.915061558771735
1.04106785694579	0.901792798772662	0.921629078680712	0.834176257382522
1.01745642155680	0.908768679823624	0.937189824043332	0.833206629359945
0.959916292864048	0.927300937726687	0.818899500025721	0.902788011369387
0.868387770111890	0.907664406898560	0.882422195742828	0.886677245083560
0.827534840987206	0.877319107390064	0.953776516234205	1.02239942419153
0.818582475857783	1.06678988660395	1.00706364152264	0.911821824992165
0.878868531836465	0.850985157885276	0.958423915806522	0.851269220993349
0.867596101629646	0.961991111000466	0.930584133176513	0.962912276157052
0.935410018513151	0.871874630091762	0.863950439809685	0.955870025606925
0.852911931842101	0.983251341999808	0.955472547551621	0.920185411047738
0.900226331538479	0.925650267191992	1.14741787705799	0.892111884959394
0.790795477596200	1.03435606219169	0.942784406060514	0.854545062927796
1.08362194701255	0.938652519591155	0.920640176046114	0.845429531372042
0.825288683241878	0.775935010746162	0.870329624896775	0.826118465939831
0.945443966196938	0.877716452666265	1.02410550697477	1.00597653332444
0.911506320258073	0.880162407354562	0.980831431989346	0.819565523424334

Cantidad de café obtenida para el caso del vaso mediano tabla 6.7.

Tabla 6.7: Valores de salida para el vaso de tamaño mediano.

0.647264057	0.553057658	0.57191493	0.552868978
0.640383873	0.545412012	0.525384719	0.638794788
0.570293894	0.625367537	0.575312832	0.618909918
0.420088296	0.632683199	0.730038562	0.672912462
0.66390493	0.583181394	0.612698115	0.61713559
0.606762547	0.541737589	0.575287369	0.587738469
0.566279242	0.65870918	0.778080629	0.507160062
0.609003849	0.498808338	0.691378865	0.698913858
0.483362509	0.736361276	0.523901813	0.615912729
0.677096561	0.610326185	0.761054905	0.79310866
0.609703829	0.466207718	0.574393524	0.54049993
0.546347905	0.520885357	0.605485426	0.74779287
0.549778956	0.580320122	0.681835309	0.685086792
0.63406365	0.671981291	0.661086721	0.573217365
0.630089452	0.579014177	0.536868756	0.644531251
0.604732279	0.586872357	0.620466454	0.669292784
0.627566748	0.613648961	0.619628615	0.603593416
0.545666487	0.655197517	0.698843383	0.562529739
0.735243967	0.587635164	0.582899431	0.53702786
0.544412755	0.533143035	0.624828618	0.7120411
0.637005243	0.659927482	0.694138687	0.424642542
0.588244695	0.624766169	0.650319707	0.508456729
0.529432181	0.65547125	0.591821813	0.638802616
0.53260493	0.485378835	0.653402825	0.683717747
0.71449873	0.49250759	0.506211681	0.496600713

Cantidad de café obtenida para el caso del vaso chico tabla 6.8.

Tabla 6.8: Valores de salida para el vaso de tamaño chico

0.297077082193181	0.256818420616936	0.392195944642887	0.197918238251389
0.177763615657709	0.314403370964616	0.383691315704080	0.243677081699078
0.211207914970559	0.289523498236571	0.185193322467181	0.301216811259244
0.358116399991970	0.315275668117603	0.166054869600559	0.262338687506216
0.278810599115135	0.427233805811614	0.364182409102892	0.295995440956055
0.391859705446352	0.226705432416948	0.275566967185141	0.399099748149614
0.405401290921779	0.351240313782803	0.334429253685813	0.258879690005112
0.352259236489037	0.241899896996871	0.340306120114329	0.319772885461373
0.379929257199672	0.270122783059258	0.344629078569178	0.355646261761097
0.236973386904680	0.310961525170058	0.412057066794099	0.307888328882059
0.278348085635803	0.332037446244131	0.280700005222478	0.331089216697641
0.290545407527211	0.298714163321470	0.332327177921729	0.395574707255114
0.331701746492537	0.415644129124205	0.157698084114825	0.268481904991850
0.316556356995262	0.241407542077995	0.210483992580774	0.343288760058228
0.342984733260634	0.320301846324418	0.327733827925702	0.238924727088121
0.265084136313387	0.292516323895336	0.251744606898525	0.323283460029123
0.465934886803607	0.266168585064531	0.345422425596665	0.227428820919361
0.393977894179405	0.232008915539856	0.314642667585658	0.256601917546986
0.335921008416194	0.300796564090689	0.296913930592409	0.506896760465501
0.255798431362117	0.296711125283070	0.488230541649037	0.219552681069624
0.338796222015948	0.224479902038702	0.372305628991874	0.322978206417006
0.345750517822251	0.280436198324690	0.317201680084357	0.403305767534193
0.140387803282782	0.185414731769045	0.329147670319157	0.254063986665299
0.279209365061267	0.194982045535100	0.236520365744040	0.271644208808181
0.249080848700549	0.239210810706266	0.270404885210109	0.233866229709232

# Referencias

---

- [1] P. BILLINGSLEY, *Probability and mesaure*, John Wiley, 1986.
- [2] D. L. COHN, *Mesaure theory*, Birkhauser(Boston), 1980.
- [3] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, Tata McGraw-Hill(Boston), 1974.
- [4] B. SOTSKOV, *Fundamentos de la teoria y del calculo de fiabilidad*, Editorial MIR, pp. 24, Moscu, 1972.
- [5] TADAO MURATA, *Petri Nets: Properties, Analysis and Aplications*, Proceedings of the IEEE, vol.77, No. 4, pp.541–580, 1989.
- [6] PETERSON, J. L. y H.D. SHERALI, *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice Hall, 1981.
- [7] BAZARAA, M.S., J.J. JARVIS y H.D. SHERALI, *Programación lineal y flujo en redes*, segunda edición, Limusa, México, DF, 2004.
- [8] W. RESIG, *Petri Nets*, Springer, New York, 1988.
- [9] DANTZIG, G.B. y P. WOLFE, «Decomposition principle for linear programs», *Operations Research*, **8**, pp. 101–111, 1960.
- [10] C. A. PETRI., *Communication with Automata*, Suplement 1 to Technical Report RADC-TR-65-337, N.Y., 1965. Translation by C.F Greene of Kommunikation mit Automaten, PhD Dissertation, Univ. of Bonn, 1962.

- 
- [11] C. A. PETRI., *Interpretation of Net Theory*, Interner Bericht ISF-75-07, Saint Augustin, Bonn; Second Edition, December 1976. Translation by C.F Greene of Kommunikation mit Automaten, PhD Dissertation, Univ. of Bonn, 1962.
- [12] C. A. PETRI., *Communication with Automata*, Supplement 1 to Technical Report RADC-TR-65-337, N.Y., 1965. Translation by C.F Greene of Kommunikation mit Automaten, PhD Dissertation, Univ. of Bonn, 1962.
- [13] C. A. PETRI. *Concepts of net theory*, Proc. of Symp. on Math Foundations of Computer Science, High Tatras, 1973.
- [14] K. JENSEN., *Coloured Petri Nets and Invariant Method*, Theoretical Computer Sciences, North Holland Publishing Company, 1981.
- [15] T. AGERWALA AND M. FLYNN., *Comments on Capabilities, Limitations and Correctness of Petri Nets*, First Annual Symposium on Computer Architecture, Florida(US), pp. 81–86, 1973.
- [16] C. RAMCHANDANI., *Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets*, Ph.D., MIT (US), 1973.
- [17] J. SIFAKIS, J., *Use of Petri Nets for Performance Evaluation*, In Measuring, Modelling and Evaluating Computer Systems, H. Beilner and E. Gelenbe Eds., North-Holland Pub., Amsterdam, pp.75–93, 1977.
- [18] M. HACK., *Analys of production schemata by Petri nets*, MIT-Project MAC, TR-94, 1972.
- [19] M. HACK., *Petri Nets Languages*, Extended State-Machine Allocatable Nets, an Extension of Free-Choice Petri Nets Results, Comput. Struct. Gr. Memo 124, MIT Project MAC, Cambridge, MA, 1975.
- [20] M. A. HOLLIDAY AND M. K. VERNON., *A Generalized Timed Petri Net Model for Performance Analysis*, IEEE Trans. on Software Engineering, vol. 13, No. 12, pp.1297–1310, 1987.
- [21] R. R. RAZOUK AND C. V. PHELPS, *Performance Analysis Using Timed Petri Nets*, in Proc. Int. Conference Parallel Processing, pp. 126–129, August 1984.

- [22] W. M. ZUBEREK., *Timed Petri Nets and Preliminary Performance Evaluation*, in Proc. 7th Ann. Symp. Computer Architecture, La Baule(FR), pp. 88–96, May 1980.
- [23] W. M. ZUBEREK, *Timed Petri Nets and Preliminary Performance Evaluation*, in Proc. 7th Ann. Symp. Computer Architecture, La Baule(FR), pp. 88–96, May 1980.
- [24] C. V. RAMAMOORTHY AND G. S. HO., *Performance Evaluation of Asynchronous Concurrent Systems Using Petri Nets*, IEEE Trans. on Software Engineering, vol. 6, no. 5, pp.440–449, 1980.
- [25] P. CHRÉTIENNE AND J. CARLIER., *Modelling Scheduling Problems with Timed Petri Nets*, Proc. 4th European Workshop on Theory and Applications of Petri Nets, Toulouse (FR), September 1983.
- [26] S. NATKIN., *Les réseaux de Petri stochastiques et leur application à l'évaluation de performances des systèmes informatiques*, Thèse de Doctorat, CNAM, Paris, June 1980.
- [27] G. FLORIN AND S. NATKIN, *Les réseaux de Petri stochastiques*, Technique et Science Informatiques, Vol. 4, no. 1, pp. 143–160, 1985.
- [28] M. K. MOLLOY., *Performance Analysis Using Stochastic Petri Nets*, IEEE Trans. on Computers, vol. C-31, no. 9, pp. 913–917, March 1982.
- [29] G. ROUCAIROL., *Vers une caractérisation de la synchronisation des processus parallèles sur les files et les piles*, 1st European Conference on Parallel and Distributed Processes, Toulouse (FR), 1979.
- [30] G. MEMMI AND R. MARTIN, *Specification and Validation of Sequential Processes Communicating by FIFO Channels*, 4th Int. Conference on Software Engineering for Telecommunication Switching Systems, I.E.E. Warwick, July 1981.
- [31] M. MOALLA., *Spécification et conception sûre d'automatismes discrets complexes, basées sur l'utilisation du Grafcet et des réseaux de Petri*, Thèse d'Etat, Grenoble University (INPG), July 1981.
- [32] M. MOALLA., *Réseaux de Petri interprétés et Grafcet*, Technique et Science Informatiques, Vol. 14, no. 1, pp. 17–30, 1985.

- [33] M. MOALLA, J. PULOU, AND J. SIFAKIS., *Extension du Grafset pour la représentation de systèmes temps réel complexes*, Journal RAIRO, Automatic Control Series, vol. 15, no. 2, pp. 159–192, 1981.
- [34] H. J. GENRICH AND K. LAUTENBACH., *The Analysis of Distributed Systems by Means of Predicate/Transition Nets, Semantics of Concurrent Computation*, in Lecture Notes in Computer Sciences, vol. 70, G. Khan Ed., pp. 123-146, Springer Verlag 1979.
- [35] C. SIBERTIN-BLANC., *High Level Petri Nets with Data Structure*, 6th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Finland, June 1985.
- [36] P. HUBER, K. JENSEN, AND R. M. SHAPIRO., *Hierarchies in Coloured Petri Nets*, 10th International Conference on Theory and Applications of Petri Nets, Bonn (DE), June 1989.
- [37] R. DAVID AND H. ALLA., *Continuous Petri Nets*, 8th European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Zaragoza(ES), June 1987.
- [38] R. DAVID AND H. ALLA., *Autonomous and Timed Continuous Petri Nets*, 11th International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Paris, pp. 367–386, June 1990. Then Lecture notes in Computer Science, Springer-Verlag, pp. 71–90, 1993.
- [39] MARIA PIA FANTI., *freeway traffci modeling and control in a fisrt order Hybrid Petri Net Framework*, Transaction on automation science and engineering, IEEE, February 2013.
- [40] K. RENGANATHAN AND VIDHYACHARAN BHASKAR., *Observer based on line fault diagnosis of continuous systems modeled as Petri nets*, Elsevier, April 2010.
- [41] DIMITRI LEFEBVRE., *About the stochastic and continuous Petri nets equivalence in the long run*, Elsevier, 14 February 2011.
- [42] M. DOTOLI, M.P. FANTI, A. GIUA AND C. SEATZU., *First-order hybrid Petri nets. An application to distributed manufacturing systems*, Elsevier, May 2006.

- 
- [43] R. DAVID AND H. ALLA., *Discrete, continuous and hybrid Petri nets*, Springer), 2010.
- [44] L. RECALDE AND M. SILVA., *Petri nets fluidification revisited. Semantics and steady state*, European Journal of Automation APII-JESA, 35(4), 435–449. 2001.
- [45] M. SILVA, J. JULVEZ, C. MAHULEA, AND C. R. VAZQUEZ., *On fluidization of discrete event models: Observation and control od continuous Petri Nets*, Discrete Event Dyn. Syst., vol. 21, no. 4, pp. 427–497, doi:10.1007/s10626-011-0116-9. Dec. 2011.
- [46] F. BALDUZZI, G. MENGA, AND A. GIUA., *First-order hybrid Petri nets: A model for optimization and control*, IEEE Trans. Robot. Autom., vol. 16, no. 4, pp. 382–399, Aug. 2000.